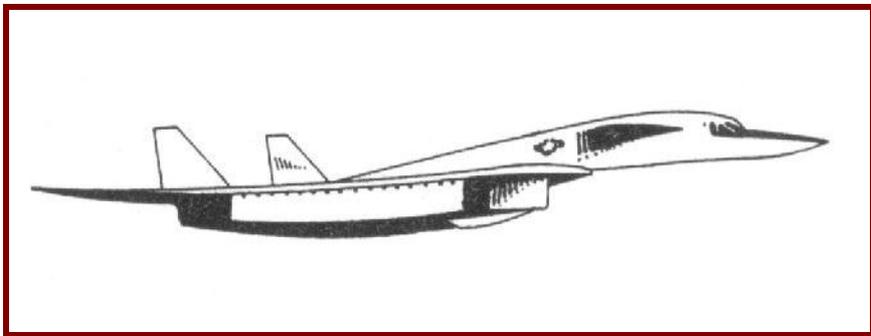


Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς ενός αυτόματου συστήματος πλοήγησης υπερηχητικού αεροπλάνου , το οποίο επικουρεί στην αεροδυναμική ευστάθεια του , κάνοντας την πτήση πιο σταθερή και πιο άνετη . Ζητείται να μελετηθεί με την βοήθεια του Comprehensive Control .



$$G(s) = \frac{2 * s}{(s + 1)^2 * (s + 2)}$$

Συγκεκριμένα ζητείται :

- (α) . Να δηλωθεί η συνάρτηση με την genter .
- (β) . Να εφαρμοστεί τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και να αποδειχθεί Θεωρητικά .
- (γ) . Να σχεδιαστεί η βηματική και η κρουστική απόκριση του συστήματος ανοιχτού και κλειστού βρόχου με μοναδιαία ανατροφοδότηση . Θεωρητική απόδειξη .
- (δ) . Να ελεγχθεί ως προς την ευστάθεια το σύστημα κλειστού βρόχου με μοναδιαία ανατροφοδότηση (routh – stability) . Και θεωρητική απόδειξη .
- (ε) . Να χαραχθεί το διάγραμμα Bode του κλειστού συστήματος μοναδιαίας ανατροφοδότησης και έπειτα να σχεδιαστούν οι ασύμπτωτες πάνω στο διάγραμμα Bode . Να αποδειχθεί και θεωρητικά .
- (στ) . Να χαραχθεί το διάγραμμα τόπου ριζών του κλειστού συστήματος μοναδιαίας ανατροφοδότησης και να αποδειχθεί συνοπτικά θεωρητικά .
- (ζ) . Να μετασχηματιστεί η $G(s)$ σε $G(z)$ με όλους τους δυνατούς τρόπους και να αποδειχθούν θεωρητικά .
- (η) . Να σχεδιαστεί η βηματική και η κρουστική απόκριση του συστήματος ανοιχτού και κλειστού βρόχου $G(z)$ με μοναδιαία ανατροφοδότηση . (μέθοδος Sampled inverse Laplace transform) Θεωρητική απόδειξη .
- (θ) . Να χαραχθεί το διάγραμμα Bode της Σ.Μ. ανοιχτού βρόχου .
- (ι) . Να σχεδιαστεί ο Γ.Τ.Ρ. του κλειστού συστήματος . Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια . Θεωρητική απόδειξη .
- (ια) . Να μελετηθεί η $G(z)$ στο χώρο κατάστασης . Κανονική μορφή . Να εξαχθούν οι πίνακες ελεγκσιμότητας – παρατηρησιμότητας και να εξαχθούν συμπεράσματα για την ευστάθεια μέσω της εντολής poles . Να εφαρμοστεί η εντολή Fadeeva Θεωρητική απόδειξη .

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ :

Α – Β. Ερώτημα :

Προσομοίωση :

CC>genter,g,1,1,2,0,3,1,1,1,1,1,1,1,1,2

$$G(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+1)(s+2)}$$

CC>ilt,g
Inverse Laplace transform (causal)

$$G(t) = \begin{cases} (-2t+4)e^{-t} - 4e^{-2t} & \text{for } t > 0 \\ 0 & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

CC>■

Θεωρητική απόδειξη :

Η $G(s)$ αναλύεται σε κλάσματα .

$$G(s) = \frac{2s}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{k_{11}}{(s+1)} + \frac{k_{12}}{(s+1)^2} + \frac{k_2}{(s+2)}$$

Όπου :

$$k_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} [G(s)(s+1)^2] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2s}{s+2} \right] \Rightarrow k_{11} = -2$$

$$k_{12} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d[G(s)(s+1)^2]}{ds} = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2(s+2) - 2s}{(s+2)^2} \right] \Rightarrow k_{12} = 4$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -2} [G(s)(s+2)] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{2s}{(s+1)^2} \right] \Rightarrow k_2 = -4$$

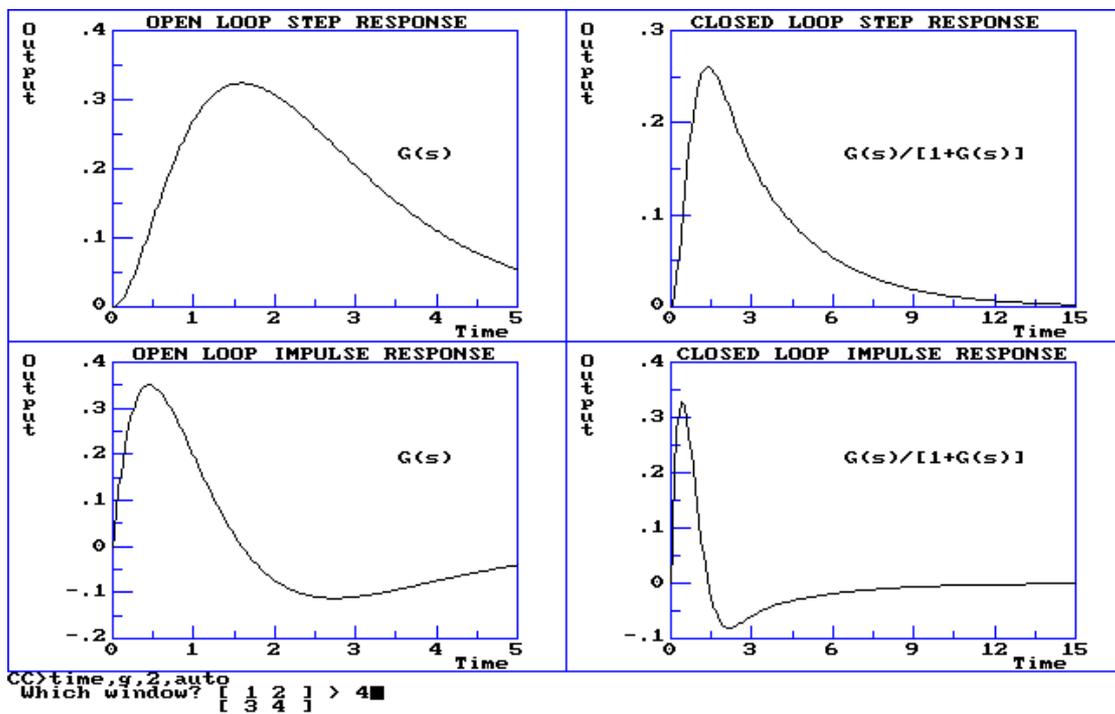
Οπότε :

$$G(s) = -\frac{2}{(s+1)} + \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{4}{(s+2)}$$

$$L^{-1}[G(s)] = g(t) = -2te^{-t} + 4e^{-t} - 4e^{-2t} \Rightarrow g(t) = e^{-t}(-2t+4) - 4e^{-2t}$$

Γ. Ερώτημα :

Προσομοίωση :



Θεωρητική απόδειξη :

Βηματική απόκριση ανοιχτού βρόχου .

$$Y(s) = G(s) * U(s) = G(s) * \frac{1}{s} = \frac{2}{(s+1)^2(s+2)}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace :

$$Y(s) = \frac{k_{11}}{(s+1)^2} + \frac{k_{12}}{(s+1)} + \frac{k_2}{(s+2)}$$

Οπότε έχουμε :

$$k_{11} = \lim_{s \rightarrow -1} [Y(s)(s+1)^2] = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{2}{(s+2)} \right] \Rightarrow k_{11} = 2$$

$$k_{12} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d[Y(s)(s+1)^2]}{ds} = \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{-2}{(s+2)^2} \right] \Rightarrow k_{12} = -2$$

$$k_2 = \lim_{s \rightarrow -2} [Y(s)(s+2)] = \lim_{s \rightarrow -2} \left[\frac{2}{(s+1)^2} \right] \Rightarrow k_2 = 2$$

Άρα έχουμε :

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace :

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-t}$$

$$y(t) = \begin{cases} y(t) = 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα και παρατηρούμε ότι οι τιμές επαληθεύουν την γραφική παράσταση

| t | Y(t) |
|-----|------|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 0.13 |
| 1 | 0.27 |
| 1.5 | 0.32 |
| 2 | 0.31 |
| 2.5 | 0.26 |
| 3 | 0.20 |
| 3,5 | 0.15 |
| 4 | 0.11 |
| 4.5 | 0.08 |
| 5 | 0.05 |

Κρουστική απόκριση ανοιχτού βρόχου :

$$Y(s) = G(s) * 1 \Rightarrow y(t) = g(t)$$

$$y(t) = \begin{cases} (-2t + 4)e^{-t} - 4e^{-2t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

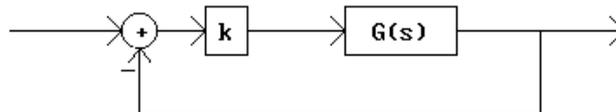
Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα και παρατηρούμε ότι οι τιμές επαληθεύουν την γραφική παράσταση

| t | Y(t) |
|-----|-------|
| 0 | 0 |
| 0.5 | 0.35 |
| 1 | 0.20 |
| 1.5 | 0.02 |
| 2 | -0.07 |
| 2.5 | 0.11 |
| 3 | -0.11 |
| 3,5 | -0.09 |
| 4 | -0.07 |
| 4.5 | -0.06 |
| 5 | -0.04 |

Δ. Ερώτημα :

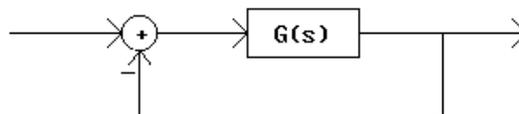
Προσομοίωση :

CC>routh
Enter transfer function > g



Stable for gain ranges : -2.25 to infinity

CC>stability
Enter transfer function > g



Closed loop characteristic polynomial:

$$p(s) = s^3 + 4s^2 + 7s + 2$$

$$s = -3.493708085606118D-01$$

$$s = -1.825314595719694D+00 (+-)j \quad 1.546868887231396D+00 \quad \left| \begin{matrix} p(s) \\ p(s) \end{matrix} \right| = \begin{matrix} 8.132D-18 \\ 1.525D-15 \end{matrix}$$

The analog closed loop system is STABLE

CC>█

Θεωρητική απόδειξη :

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου για $K=1$ (stability) δίνεται από την σχέση $p(s)$ στην οποία θα εφαρμόσω το κριτήριο Routh

$$X.E. \Rightarrow p(s) = 0 \Rightarrow s^3 + 4s^2 + 7s + 2 = 0$$

| Πίνακας Routh | | |
|----------------------------------|-----|---|
| s^3 | 1 | 7 |
| s^2 | 4 | 2 |
| s^1 | 6.5 | 0 |
| s^0 | 2 | |
| Το σύστημα είναι ευσταθές | | |

Προφανώς το σύστημά για $K=1$ είναι ευσταθές αφού άλλωστε οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολωνύμου βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο .

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου για άπειρες τιμές του K (Routh) δίνεται από την σχέση $p(s)$ στην οποία θα εφαρμόσω το κριτήριο Routh

$$X.E. \Rightarrow p(s) = 0 \Rightarrow s^3 + 4s^2 + (5 + 2K)s + 2 = 0$$

| Πίνακας Routh | | |
|----------------------------------|----------|--------|
| s^3 | 1 | $5+2K$ |
| s^2 | 4 | 2 |
| s^1 | $2K+4.5$ | 0 |
| s^0 | 2 | |
| Το σύστημα είναι ευσταθές | | |

Από τον πίνακα Routh Θα βρούμε το κρίσιμο K_{cr} . Έτσι θα είναι

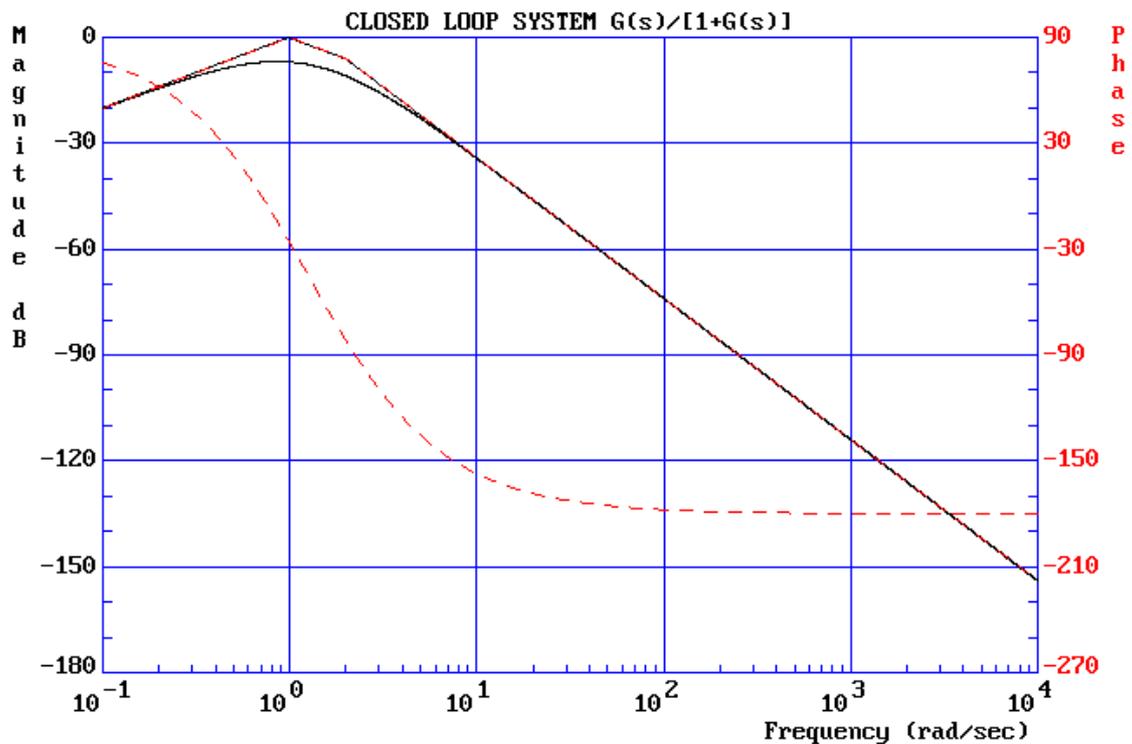
$$(2K+4,5)=0 \text{ οπότε } K_{cr}=-2.25$$

Το σύστημα κλειστού βρόχου θα είναι **ΕΥΣΤΑΘΕΣ** για τιμές του K μεγαλύτερες του -2.5 . Δηλαδή $K : (-2.5 , +\infty)$

Ε . Ερώτημα .

Προσομοίωση :

```
CC>freq,g,0.1,10000,5000,0  
FREQ data file created  
CC>bode,3,auto
```



Θεωρητική απόδειξη :

Αν θέσω $s=j*\omega$ στην συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου $G(s)H(s)$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{2(j\omega)}{(j\omega+1)^2(j\omega+2)} = \frac{\left(j\frac{\omega}{1}\right)}{\left(j\frac{\omega}{1}+1\right)^2\left(j\frac{\omega}{2}+1\right)}$$

Οπότε έχουμε :

Τρεις πόλους $\omega_2 = \omega_3 = 1 \text{ rad/sec}$
 $\omega_4 = 2 \text{ rad/sec}$

Για $\omega < \omega_2$ η $G(s)H(s) \rightarrow (j\omega)$ ευθεία με κλίση +20db διερχόμενη από τ ($1 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, 0db)

Για $\omega_2 = \omega_3 < \omega < \omega_4$ η $G(s)H(s) \rightarrow 1$ ευθεία με κλίση -20db

Για $\omega_4 < \omega$ η $G(s)H(s) \rightarrow \frac{1}{(j\omega)^2}$ ευθεία με κλίση -40db

Η φάση δίνεται από τον παρακάτω τύπο .

$$\Phi = 90^\circ - 2 * \tan^{-1}(\omega) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

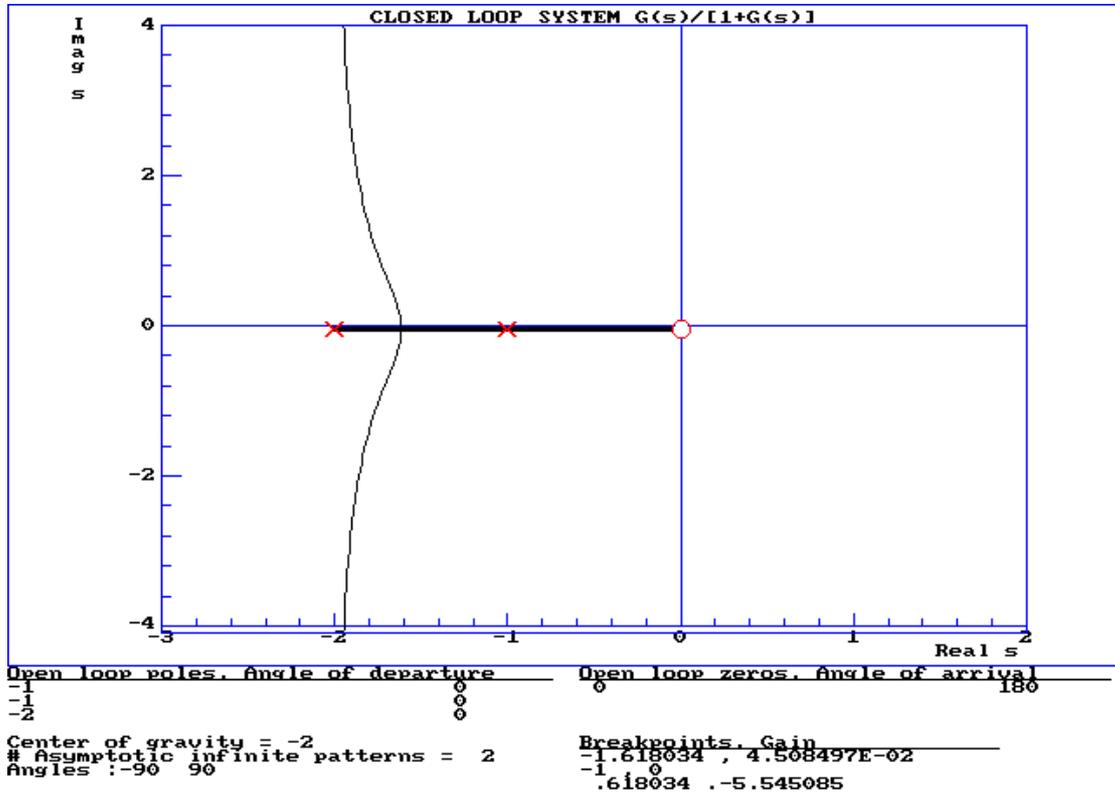
Έτσι για διάφορες τιμές του ω προκύπτει ο ποιο κάτω πίνακας . Οι τιμές αυτές επαληθεύουν το διάγραμμα φάσης .

| Ω rad/sec | $\Phi(\omega)$ μοίρες |
|---------------------|--------------------------|
| 0.1 | 75.7 |
| 0.5 | 22.8 |
| 1.0 | -26.6 |
| 5.0 | -135.6 |
| 10.0 | -157.3 |
| 50.0 | -175.4 |
| 100.0 | -177.8 |
| 500.0 | -179.5 |

ΣΤ . Ερώτημα :

Προσομοίωση :

CC>root locus,g,auto



Θεωρητική απόδειξη :

Η $G(s) = \frac{2*s}{(s+1)^2*(s+2)}$ έχει τρεις πόλους (ένα διπλό και ένα απλό) και ένα μηδενικό

$$p_1 = p_2 = -1 , p_3 = -2$$
$$z_1 = 0$$

Αρα ο τόπος των ριζών θα έχει **τρεις κλάδους** . Στον πραγματικό άξονα θα έχουμε τόπο μεταξύ του z_1 και του p_1 και μεταξύ του p_2 και του p_3

$$\text{Ασύμπτωτες : } \Phi_\alpha = \frac{(2*\mu+1)*180^\circ}{n_p - n_z} = (2*\mu+1)*90^\circ = \begin{cases} \mu = 0 \Rightarrow \varphi_{\alpha 1} = 90^\circ \\ \mu = 1 \Rightarrow \varphi_{\alpha 2} = 270^\circ \end{cases}$$

Αρα υπάρχουν δύο **ασύμπτωτες** στις 90° , 270° . **Σημείο τομής** των ασύμπτωτων με τον πραγματικό άξονα .

$$\sigma_a = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n_p - n_z} = \frac{(-1-1-2)-0}{3-1} \Rightarrow \sigma_a = -2$$

Σημείο αποχωρισμού από τον πραγματικό άξονα . **break way point**

$$\frac{2}{|\sigma_b|-1} + \frac{1}{|\sigma_b|-2} = \frac{1}{|\sigma_b|} \Rightarrow \frac{2*|\sigma_b|-4+|\sigma_b|-1}{(|\sigma_b|-1)*(|\sigma_b|-1)} = \frac{1}{|\sigma_b|} \Rightarrow$$

$$2*|\sigma_b|^2 - 2*|\sigma_b| - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} |\sigma_b| = 1.62 \\ |\sigma_b| = -0.618 \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

Άρα τελικά $\sigma_b = -1.62$.

Z. Ερώτημα :

Προσομοίωση :

Forward rectangle :

```
CC>convert,g,f1,1,1
Now in digital mode
DIG>f1
```

$$tf = \frac{z(z-1)}{z^2(z+1)}$$

```
DIG>izt,f1
Inverse z transform (causal)
```

$$F1(n) = -4 \delta(n) + 4 \delta(n-1) - 2 \delta(n-2)$$

$$+ \begin{cases} 4 \cdot (-1)^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Backward rectangle :

```
DIG>convert,g,f2,2,1
Now in analog mode
Now in digital mode
DIG>f2
```

$$tf = \frac{.1666667z^2(z-1)}{(z-.5)(z-.5)(z-.3333333)}$$

```
DIG>izt,f2
Inverse z transform (causal)
```

$$F2(n) = \begin{cases} (-.5n+1.5) \cdot (.5)^n - 1.333333 \cdot (.3333333)^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Bilinear :

```
DIG>convert,g,f3,3,1
Now in analog mode
Now in digital mode
DIG>f3
```

$$tf = \frac{.1111111(z-1)(z+1)(z+1)}{z(z-.3333333)(z-.3333333)}$$

```
DIG>izt,f3
Inverse z transform (causal)
```

$$F3(n) = -7 \delta(n) - \delta(n-1)$$

$$+ \begin{cases} (-3.555556n+7.111111) \cdot (.3333333)^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Pole – Zero mapping :

```
DIG>convert,g,f4,6,1
Now in analog mode
Now in digital mode
DIG>f4
```

$$tf = \frac{.0863749(z - 1)(z + 1)(z + 1)}{(z - .3678795)(z - .3678795)(z - .1353353)}$$

```
DIG>izt,f4
Inverse z transform (causal)
```

$$F4(n) = 4.71591 \delta(n)$$

$$+ \begin{cases} (-3.246136n + 8.524581) * (.3678795)^n - 13.15412 * (.1353353)^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Sampled inverse Laplace transform

```
DIG>convert,g,f5,7,1
Now in analog mode
Now in digital mode
DIG>f5
```

$$tf = \frac{.1944177z(z - 1.247925)}{(z - .3678795)(z - .3678795)(z - .1353353)}$$

```
DIG>izt,f5
Inverse z transform (causal)
```

$$F5(n) = \begin{cases} (-2n + 4) * (.3678795)^n - 4 * (.1353353)^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Zero order hold :

```
DIG>convert,g,f6,8,1
Now in analog mode
Now in digital mode
DIG>f6
```

$$tf = \frac{.2706706(z - 1)(z + .2642411)}{(z - .3678795)(z - .3678795)(z - .1353353)}$$

```
DIG>izt,f6
Inverse z transform (causal)
```

$$F6(n) = 3.904985 \delta(n)$$

$$+ \begin{cases} (-3.436564n + 8.873127) * (.3678795)^n - 12.77811 * (.1353353)^n & \text{for } n \geq 0 \\ 0 & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Θεωρητική απόδειξη :

Forward rectangle :

Θέτω στην $G(s)$ την σχέση $s = \frac{z-1}{T}$, $T=1$ οπότε και παίρνω την παρακάτω διακεκριμένη συνάρτηση .

$$F_1(z) = \frac{z * (z-1)}{z^2 * (z+1)}$$

Backward rectangle :

Θέτω στην $G(s)$ την σχέση $s = \frac{z-1}{z * T}$, $T=1$ οπότε και παίρνω την παρακάτω διακεκριμένη συνάρτηση .

$$F_2(z) = \frac{2(1-z^{-1})}{(1-z^{-1}+1)^2 * (1-z^{-1}+2)} \Rightarrow F_2(z) = \frac{0.166 * z^2 * (z-1)}{(z-0.5)^2 * (z-0.33)}$$

Bilinear :

Θέτω στην $G(s)$ την σχέση $s = \frac{2 * (1-z^{-1})}{T * (1+z^{-1})} = \frac{2 * (z-1)}{T * (z+1)}$, $T=1$ οπότε και παίρνω την παρακάτω διακεκριμένη συνάρτηση .

$$F_3(z) = \frac{4 * \frac{z-1}{z+1}}{\left[2 * \frac{z-1}{z+1} + 1\right]^2 * \left[2 * \frac{z-1}{z+1} + 2\right]} \Rightarrow F_3(z) = \frac{0.111 * (z-1) * (z+1)^2}{z * (z-0.333)^2}$$

Pole – Zero mapping :

Εφαρμόζοντας την μεθοδολογία που αναπτύξαμε σε σχετική ενότητα (εντολή CONVERT)

$$F_4(z) = \frac{K_{dc} * (1+z)^2 * (z-1)}{(z-e^{-T}) * (z-e^{-T}) * (z-e^{-2T})}$$

Θέτουμε $T=1$ και υπολογίζουμε την K_{dc} βάση της σχέσης $F_4(z)|_{z=1} = G(s)|_{s=0}$
Οπότε $K_{dc} = 0.086$. Η τελική μορφή της συνάρτησης θα είναι .

$$F_4(z) = \frac{0.086 * (z-1) * (z+1)^2}{(z-0.368)^2 * (z-0.135)}$$

Sampled inverse Laplace transform :

$$L^{-1}[G(s)] = L^{-1}\left[\frac{2 * s}{(s+1)^2 * (s+2)}\right] = e^{-t} * (4 - 2 * t) - 4 * e^{-2t}$$

Θέτω $t=kT$ οπότε και έχουμε :

$$g(k * T) = e^{-kT} * (4 - 2 * k * T) - 4 * e^{-2kT} \Rightarrow g(k * T) = 4e^{-kT} - 2kTe^{-kT} - 4e^{-2kT}$$

Σύμφωνα με το τυπολόγιο .

$$F_5(z) = 4 \frac{z}{(z-e^{-T})} - 2 \frac{T * z * e^{-T}}{(z-e^{-T})^2} - 4 \frac{z}{(z-e^{-2T})} \xrightarrow{T=1}$$

$$F_5(z) = \frac{0.194 * z * (z-1.24)}{(z-0.368)^2 * (z-0.135)}$$

Zero order hold :

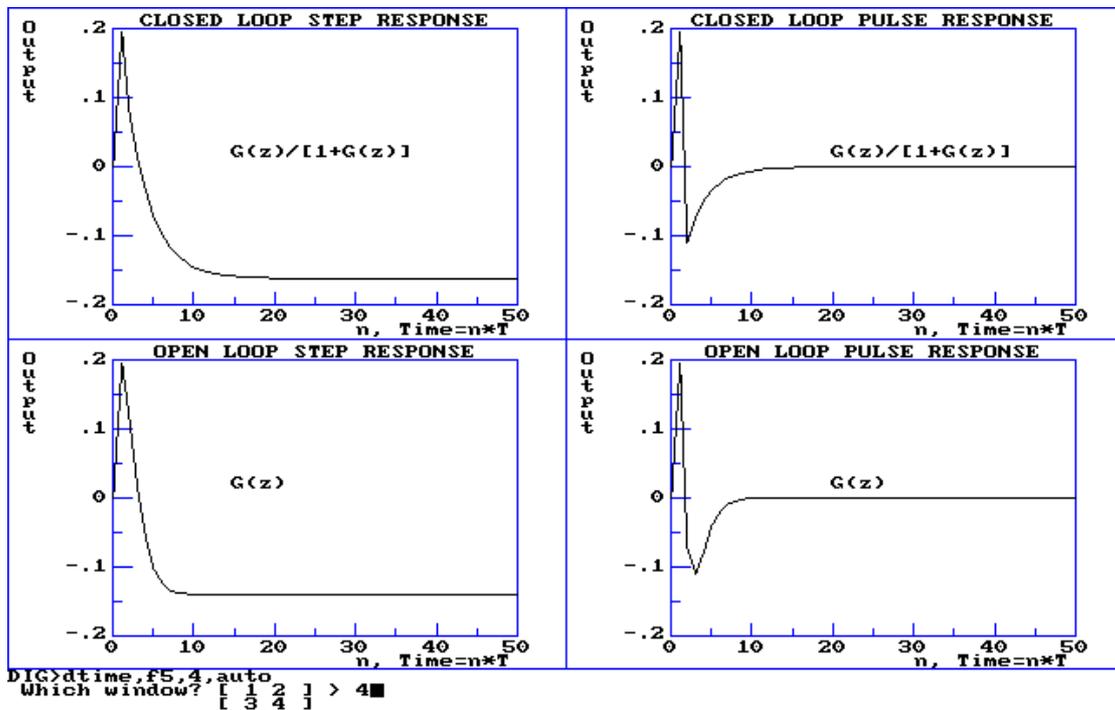
$$F_6(z) = (1-z^{-1}) * Z\left[\frac{G(s)}{s}\right] = (1-z^{-1}) * Z\left[\frac{2}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)}\right] \xrightarrow{T=1}$$

$$F_6(z) = \frac{z-1}{z} * \left(\frac{2 * z * e^{-1}}{(z-e^{-1})^2} - \frac{2 * z}{z-e^{-1}} + \frac{2 * z}{z-e^{-2}}\right) \Rightarrow F_6(z) = \frac{0.270(z-1)(0.270z+0.071)}{(z-0.368)^2(z-0.135)}$$

Παρατήρηση : Όπου βλέπουμε 'E(n) εννοείται η δ(n) κρουστική συνάρτηση.

Η. Ερώτημα :

Προσομοίωση :



Παρατήρηση : Με την βοήθεια της εντολής WINDOWS μπορέσαμε και χωρίσαμε το παράθυρο γραφικών σε τέσσερα ίδια κομμάτια έτσι ώστε να μπορούμε να έχουμε τέσσερις γραφικές παραστάσεις ταυτόχρονα στο ίδιο παράθυρο .

Θεωρητική απόδειξη :

Βηματική διέγερση ανοιχτού συστήματος .

$$Y(z) = F_5(z) * U(z) = \frac{0.194 * z * (z - 1.24)}{(z - 0.368)^2 * (z - 0.135)} * \frac{z}{z - 1} \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{1.159 * z^2}{(z - 0.368)^2} - \frac{1.64 * z}{(z - 0.368)} + \frac{0.62 * z}{(z - 0.135)} - \frac{0.14 * z}{(z - 1)} \xrightarrow{z^{-1}[], T=1}$$

$$y(n) = e^{-n} * (1.15n - 0.49) + 0.62e^{-2n} - 0.14$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε εάν εκτελούσαμε την εντολή IZT για την $Y(z)$.

Από την $y(n)$ εξάγουμε έναν πίνακα τιμών ο οποίος συμπίπτει με τις τιμές της γραφικής του παράθυρου (3) .

| n | Y(n) |
|----------|-------------|
| 0 | -0.010 |
| 1 | 0.180 |
| 2 | 0.110 |
| 3 | 0.009 |
| 4 | -0.060 |
| 5 | -0.100 |
| 6 | -0.120 |
| 7 | -0.133 |
| 8 | -0.137 |
| 9 | -0.138 |
| 10 | -0.139 |

Κρουστική διέγερση ανοιχτού συστήματος .

Ομοίως :

$$Y(z) = F_5(z) * 1 \xrightarrow{Z^{-1}[\], T=1}$$

$$y(n) = e^{-n} * (-1.991 * n + 3.98) - 3.97 * e^{-2n}$$

Από την $y(n)$ εξάγουμε έναν πίνακα τιμών ο οποίος συμπίπτει με τις τιμές της γραφικής του παράθυρου (3) .

| n | Y(n) |
|----------|-------------|
| 0 | 0.0100 |
| 1 | -0.1900 |
| 2 | -0.0700 |
| 3 | -0.1100 |
| 4 | -0.0700 |
| 5 | -0.0400 |
| 6 | -0.0200 |
| 7 | -0.0100 |
| 8 | -0.0040 |
| 9 | -0.0010 |
| 10 | -0.0007 |

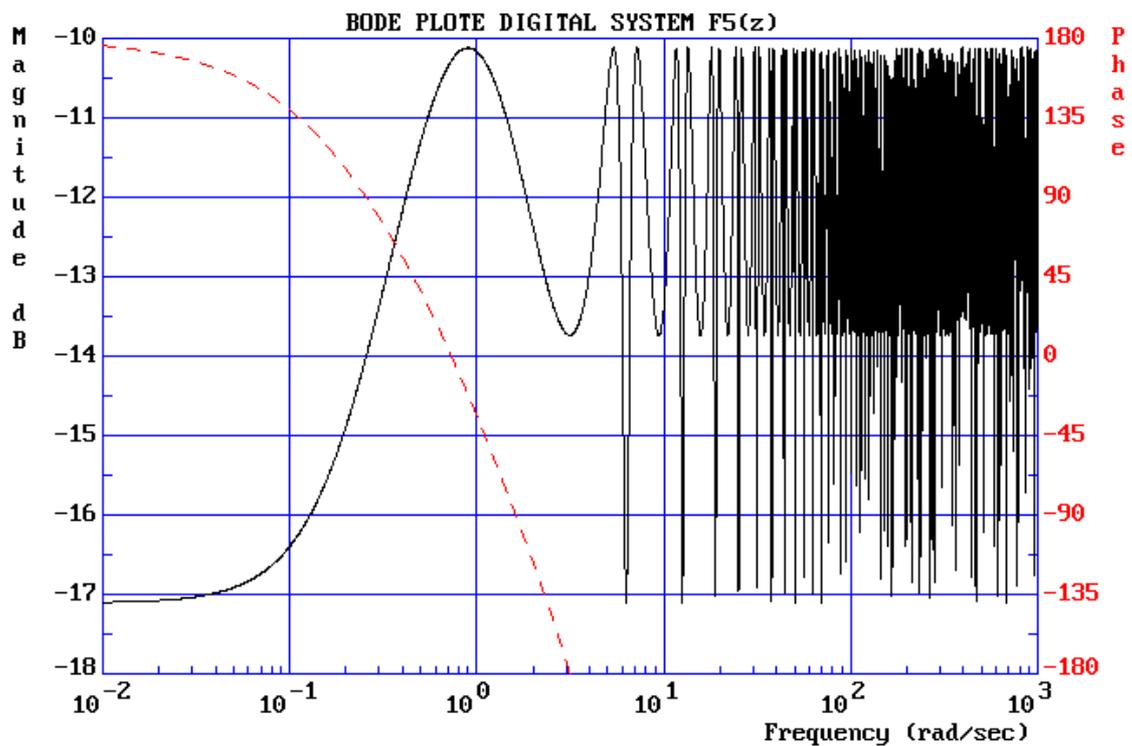
Θ . Ερώτημα :

Προσομοίωση :

```
CC>dig
Now in digital mode
Enter sample time T > 1
Sample time T = 1, Rate 1/T = 1, Foldover PI/T = 3.141593
DIG>f5
```

$$tf = \frac{.1944177z(z - 1.247925)}{(z - .3678795)(z - .3678795)(z - .1353353)}$$

```
DIG>freq,f5,0.01,1000,3000,0
FREQ data file created
DIG>bode,3,auto
```

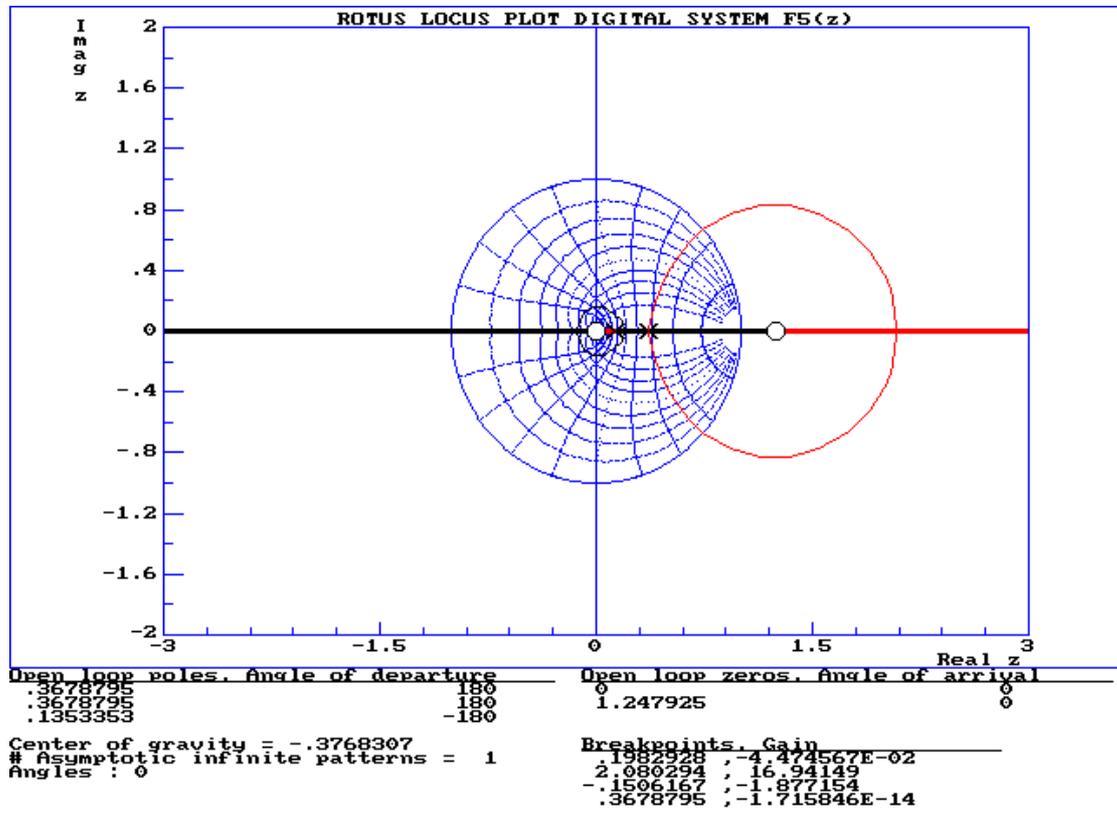


Options> A B C D E F G H I J K L M P Q S T W X Y Z ?=help

I. Ερώτημα :

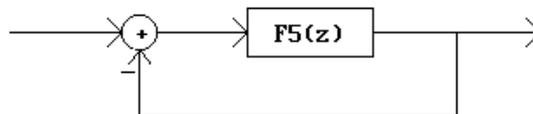
Προσομοίωση :

DIG>root locus ,f5 , auto █



Παρατήρηση : Το διάγραμμα τύπου ριζών με την μαύρη γραμμή είναι ο Γ.Τ.Ρ. του F5(z) για K>0 . Ενώ αυτό με την κόκκινη γραμμή είναι της F5(z) για K<0

DIG>stability,f5



Closed loop characteristic polynomial:

$$p(z) = z^3 - .6766764z^2 - 7.709303E-03z - 1.831564E-02$$

$$z = -9.152798903294196D-02 (+-)j 6.302871780803161D-01 \quad \begin{cases} |p(z)| = 2.143D-16 \\ |p(z)| = 9.923D-16 \end{cases}$$

The digital closed loop system is STABLE

DIG>█

Θεωρητική απόδειξη :

Διάγραμμα τύπου ριζών :

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου δίνεται από την σχέση :

$$F_5(z)H(z) = \frac{K * 0.194 * z * (z - 1.24)}{(z - 0.368)^2 * (z - 0.135)}$$

έχει τρεις πόλους (ένα διπλό και ένα απλό) και δύο μηδενικά

$$p_1 = p_2 = 0.368 , p_3 = -0.135$$
$$z_1 = 1.24$$

Αρα ο τύπος των ριζών θα έχει **τρεις κλάδους** . Στον πραγματικό άξονα θα έχουμε τόπο μεταξύ του z_1 και του p_1 και μεταξύ του p_2 και του p_3 και $z_1 \rightarrow -\infty$

$$\text{Ασύμπτωτες : } \Phi_\alpha = \frac{(2 * \mu + 1) * 180^\circ}{n_p - n_z} = (2 * \mu + 1) * 180^\circ \xrightarrow{\mu=0} \Phi_\alpha = 180^\circ$$

Αρα υπάρχει μία **ασύμπτωτες** στις 180 μοίρες . **Σημείο τομής** των ασύμπτωτων με τον πραγματικό άξονα .

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum p - \sum z}{n_p - n_z} = 0.871 - 1.248 \Rightarrow \sigma_\alpha = -0.377$$

Σημείο αποχωρισμού από τον πραγματικό άξονα . **break way point**

$$\frac{2}{|\sigma_b| - 0.368} + \frac{1}{|\sigma_b| - 0.135} = \frac{1}{|\sigma_b| - 1.248} \Rightarrow \sigma_b = \begin{cases} -0.150 \\ +0.198 \end{cases}$$

Αρα τελικά έχω δύο σημεία αποχωρισμού από τον πραγματικό άξονα .

Ευστάθεια :

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος $F_5(z)$ με μοναδιαία ανατροφοδότηση $H(z) = 1$ (κλειστό σύστημα) δίνεται από την σχέση θεωρούμε ότι $K=1$ (stability).

$$p(z) = 0 \Rightarrow 1 + F_5(z) * H(z) = 0 \Rightarrow z^3 - 0.677 * z^2 - 0.008 * z - 0.018 = 0$$

Εφαρμόζουμε **Jury test** για την παραπάνω εξίσωση .

| z0 | z1 | z2 | z3 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| -0.018 | -0.008 | -0.677 | 1 |
| 1 | -0.677 | -0.008 | -0.018 |
| -0.999 | 0.677 | 0.020 | |

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, n = 3 \Rightarrow b_0 = -0.999, b_1 = 0.677, b_2 = 0.020$$

Προφανώς: $a_0 = -0.018, a_1 = -0.008, a_2 = -0.677, a_3 = 1$

Παίρνω τις εξής ανισώσεις :

$$p(1) = 0.29 > 0$$

$$(-1)^n * p(-1) = 1.68 > 0$$

$$|a_0| < |a_3|$$

$$|b_0| > |b_2|$$

Όλες οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν άρα μπορούμε να πούμε ότι για $K=1$ το σύστημα κλειστού βρόχου μοναδιαίας ανατροφοδότησης είναι **ευσταθές**.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.368 & 1 & 0 \\ 0 & 0.368 & 0 \\ 0 & 0 & 0.135 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * r(k)$$

$$y(k) = [-0.272 \quad 0.733 \quad -0.537] * \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + 0 * r(k)$$

Παρατήρηση : Η πίνακες κατάστασης του συστήματος $F5(z)$ προέκυψαν βάση της ανάλυση κλασμάτων - **κανονική μορφή** . Δεν κάναμε χρήση των τύπων **κανονικής μορφής φάσης** ή **ελέγξιμης κανονικής μορφής** ή **της παρατηρήσιμης κανονικής μορφής** ή **της διαγώνιας κανονικής μορφής** . Παρόλα αυτά όποια και μέθοδο και αν επιλέξουμε για να περιγράψουμε το σύστημα θα μας επιστέψουν τα ίδια αποτελέσματα ως προς την ευστάθεια – ελεγχιμότητα και παρατηρησιμότητα του συστήματος .

Οι τέσσερις πίνακες με την σειρά όπως τους βλέπουμε παραπάνω δηλώνονται ως A, B, C, D με τους οποίους θα περιγράψουμε το σύστημα από εδώ και στο εξής . Δηλαδή $P = [A, B ; C, D]$.

Μελέτη ευστάθειας συστήματος με την χρήση του πίνακα A :

Παίρνω την χαρακτηριστική εξίσωση και αν οι ρίζες της είναι εντός μοναδιαίου μιγαδικού κύκλου z τότε το σύστημά μας είναι ευσταθές .

$$X.E. : p(z) = 0 \Rightarrow |\lambda * I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 0.368 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 0.368 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 0.135 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 0.368)^2 * (\lambda - 0.135) = \begin{cases} \lambda_{1,2} = 0.135 \Rightarrow |\lambda_{1,2}| < 1 \\ \lambda_3 = 0.368 \Rightarrow |\lambda_3| < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ}$$

Μελέτη Ελεγχιμότητας του συστήματος :

Ύστερα από υπολογιστικές πράξεις προκύπτει ότι :

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.368 \\ 0.135 \end{bmatrix}, \quad A^2 * B = \begin{bmatrix} 0.736 \\ 0.135 \\ 0.018 \end{bmatrix}$$

Οπότε σύμφωνα με την γνωστή σχέση για τον πίνακα ελεγχιμότητας του διανύσματος κατάστασης ενός συστήματος θα έχουμε .

$$S = [B \quad A * B \quad A^2 * B] \Rightarrow S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.736 \\ 1 & 0.368 & 0.135 \\ 1 & 0.135 & 0.018 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του πίνακα S ισούται με -0.054 δηλαδή διάφορη του μηδενός άρα το $\text{rank}(S)=3$ οπότε **το σύστημα είναι ελέγξιμο** .

Ομοίως ο πίνακας παρατηρησιμότητας διανύσματος κατάστασης δίνεται .

$$R^T = \begin{bmatrix} -0.272 & -0.099 & -0.037 \\ 0.733 & -1.138 * 10^{-4} & -0.099 \\ -0.537 & -0.073 & -0.01 \end{bmatrix} \Rightarrow |R^T| = -0.002 \neq 0$$

Η ορίζουσα του πίνακα R^T είναι δηλαδή διάφορη του μηδενός άρα το $\text{rank}(T)=3$ οπότε **το σύστημα είναι παρατηρήσιμο** .

Μετάβαση από τους πίνακες κατάστασης στην συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος :

Παίρνουμε την γνωστή σχέση $T(z) = z^{-1} * C * z * [z - I * A] * B + D$. Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην .

$$T(z) = \frac{0.193718 * z^2 - 0.241970 * z - 1.4 * 10^{-5}}{(z - 0.368)^2 * (z - 0.135)} \cong F_5(z)$$

Οι αποκλίσεις που υπάρχουν μεταξύ της $T(z)$, $F_5(z)$ οφείλονται σε διάφορες στρογγυλοποιήσεις πράξεων .

Προσομοίωση :

DIG>A=(0.368,1,0;0,0.368,0;0,0,0.135)

DIG>B=(0;1;1)

DIG>C=(-0.272,0.733,-0.537)

DIG>D=0

DIG>pack,a,b,c,d,p

DIG>state

STATE>p

#states = 3 #outputs = 1 #inputs = 1

A

```
1: 0.3680000      1      .
2:      .      0.3680000      .
3:      .      .      0.1350000
```

B

```
1:      .
2:      1
3:      1
```

C

```
1:-0.2720000      0.7330000      -0.5370000
```

D=0

STATE>poles,p

Poles:

| | Real | Imaginary | Damping | Frequency |
|----|--------------|-----------|---------|--------------|
| 1: | 1.350000D-01 | 0 | -1 | 1.350000D-01 |
| 2: | 3.680000D-01 | 0 | -1 | 3.680000D-01 |
| 3: | 3.680000D-01 | 0 | -1 | 3.680000D-01 |

STATE>conmatrix,p,s

STATE>s

#rows = 3 #columns = 3

```
1:      .      1      0.7360000
2:      1      0.3680000      0.1354240
3:      1      0.1350000      0.0182250
```

STATE>controllability,p

Eigenvalues of A are compared with those of A+BF and A+HC.

F & H have random elements uniformly distributed in the range +- 1

An eig. of A is considered un-cont. if no eig.s of A+BF are within .000001

An eig. of A is considered un-obs. if no eig.s of A+HC are within .000001

Multiple eig.s of A maybe un-cont. or un-obs. if at least 1 of them is.

| Evalues of A: | | Controllable? | Observable? |
|---------------|--|---------------|-------------|
| .135 | | yes | yes |
| .368 | | maybe | maybe |
| .368 | | maybe | maybe |

STATE>obsmatrix,p,r

STATE>r

#rows = 3 #columns = 3

```
1:-0.2720000      0.7330000      -0.5370000
2:-0.1000960      -2.256000D-03      -0.0724950
3:-0.0368353      -0.1009262      -9.786825D-03
```

STATE>fadeeva,p,t

STATE>cc

DIG>t

$$tf = \frac{.196z^2 - .245467z + 4.12752E-04}{z^3 - .871z^2 + .234784z - 1.828224E-02}$$

DIG>█

Γενικές Παρατηρήσεις : Διαπιστώνουμε ότι τα αποτελέσματα της προσομοίωσης επαληθεύουν τα αποτελέσματα των θεωρητικών αποδείξεων . Αυτό λοιπόν επιβεβαιώνει ότι το **Comprehensive Control** αποτελεί ένα αξιόπιστο πρόγραμμα ώστε να βγάζουμε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματά μας γρήγορα και με απόλυτη ακρίβεια .