

ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΤΟΥ MATLAB

Η συλλογή προγραμμάτων του MATLAB περιέχει το βασικό πρόγραμμα συν μία ποικιλία από βοηθήματα(toolboxes).Τα toolboxes είναι μία συλλογή ειδικών αρχείων,τα Μαρχεία,τα οποία επεκτείνουν τις δυνατότητες του βασικού προγράμματος.Το βασικό πρόγραμμα μαζί με το Control System Toolbox μας δίνουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιούμε το MATLAB για σχεδιασμό και ανάλυση συστημάτων ελέγχου.

1: Δηλώσεις και Μεταβλητές

Οι δηλώσεις στο MATLAB γίνονται ως εξής:

>>μεταβλητή=έκφραση

Το (“=”) αναθέτει την έκφραση στη μεταβλητή.Η προτροπή εντολής είναι δύο δεξιά βέλη “>>”.

Μια τυπική δήλωση φαίνεται στο σχήμα 1,στην οποία εισάγουμε έναν πίνακα 2x2 με όνομα μεταβλητής Α.Ο πίνακας Α εμφανίζεται αυτόματα μετά την εκτέλεση της δήλωσης (μετά το carriage return).

```
>>A=[1 2;4 6] <ret>

A=
 1  2
 4  6
>>A=[1 2;4 6];
>>
```

Το ερωτηματικό δεν δίνει έξοδο

Σχήμα 1: Εισαγωγή πίνακα

Το MATLAB μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης σε “calculator” mode.Ενα παράδειγμα φαίνεται στο σχήμα 2.

```
>>12.4/6.9

ans=
 1.7971
```

Σχήμα 2: Calculator mode

Οι πιο συνηθισμένοι μαθηματικοί τελεστές δείχνονται πιο κάτω στον πίνακα 1.

Πίνακας 1:Μαθηματικοί Τελεστές

| | |
|---|-----------------|
| + | Πρόσθεση |
| - | Αφαίρεση |
| * | Πολλαπλασιασμός |
| / | Διαίρεση |
| ^ | δύναμη |

Στον πίνακα 2 υπάρχει πλήρης λίστα των κυριότερων τριγωνομετρικών και στοιχειωδών μαθηματικών συναρτήσεων.

Πίνακας 2: Κυριότερες μαθηματικές συναρτήσεις

| | |
|------------|--------------------------------|
| sin(X) | Ημίτονο του X |
| cos(X) | Συνημίτονο του X |
| asin(X) | Τόξο ημιτόνου του X |
| acos(X) | Τόξο συνημιτόνου του X |
| tan(X) | Εφαπτομένη του X |
| atan(X) | Τόξο εφαπτομένης του X |
| atan2(X,Y) | Ορισμα του $Y+iX$ |
| abs(X) | Απόλυτη τιμή του X |
| sqrt(X) | Τετραγωνική ρίζα του X |
| imag(X) | Φανταστικό μέρος του X |
| real(X) | Πραγματικό μέρος του X |
| conj(X) | Συζυγής μιγαδικός του X |
| log(X) | Φυσικός λογάριθμος του X |
| log10(X) | Λογάριθμος του X με βάση το 10 |
| exp(X) | X δύναμη του e |

Υπάρχουν επίσης ορισμένες προκαθορισμένες μεταβλητές,όπως pi,Inf,Nan,i και j.Τρία παραδείγματα φαίνονται στο σχήμα 3,όπου το Nan δίνεται ως αποτέλεσμα Κανένα-αριθμού σε μη προσδιορίσιμες λειτουργίες.Το Inf είναι το $+\infty$ και το pi είναι το π . Οι μεταβλητές i

και j παριστάνουν μιγαδικούς αριθμούς , όπου $i=\sqrt{-1}$ και $j=\sqrt{-1}$.Οι προκαθορισμένες μεταβλητές μπορούν να αλλαχθούν από τις εξ ορισμού τιμές τους χρησιμοποιώντας την εντολή clear (π.χ., clear pi). Έτσι κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει το i ως ακέραιο και να κρατήσει το j για μιγαδική αριθμητική.

```

>>z=3+4*i

z=
    3.0000+4.0000i
>>Inf

ans=
    Inf
>>0/0

Warning : Divide by zero
ans=
    NaN

```

Σχήμα 3 : Τρεις προκαθορισμένες μεταβλητές i, Inf, και Nan.

Το MATLAB ξεχωρίζει ακόμα τα κεφαλαία γράμματα από τα μικρά. Επομένως οι μεταβλητές M και m δεν είναι οι ίδιες (σχήμα 4).

```

>>M=[1 2];
>>m=[3 5 7];

```

Σχήμα 4

Όλες οι μεταβλητές φυλάσσονται στο χώρο εργασίας του MATLAB. Η συνάρτηση who δίνει μία λίστα όλων των μεταβλητών στο χώρο εργασίας (σχήμα 5). Μπορεί να χρησιμοποιηθεί επίσης και η συνάρτηση whos η οποία δείχνει τις μεταβλητές του χώρου εργασίας, και μας παρέχει πρόσθετες πληροφορίες για τις διαστάσεις, τον τύπο (πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός) και τον καταμερισμό μνήμης (σχήμα 6).

```

>>who

Your variables are:

A  M  ans  m  z

leaving 675516 bytes of memory free.

```

Σχήμα 5

```
>>whos
```

| | Name | Size | Total | |
|---------|------|--------|-------|----|
| Complex | A | 2 by 2 | 4 | No |
| | M | 1 by 1 | 2 | |
| No | ans | 1 by 1 | 1 | No |
| | m | 1 by 3 | 3 | |
| No | z | 1 by 1 | 2 | |
| Yes | | | | |

Grand total is (12*8)=96 bytes,
leaving 664912 bytes of memory free.

Σχήμα 6

Οι πληροφορίες κατανομής μνήμης που δίνονται από τη συνάρτηση whos μπορούν να ερμηνευτούν όπως πιο κάτω. Κάθε στοιχείο του 2x2 πίνακα A απαιτεί 8 bytes μνήμης, έτσι ώστε να καταλαμβάνονται συνολικά 32 bytes. Η 1x1 μεταβλητή ans απαιτεί 8 bytes, κλπ. Όλες οι μεταβλητές στο χώρο εργασίας χρησιμοποιούν συνολικά 96 bytes. Το ποσό της εναπομένουσας ελεύθερης μνήμης εξαρτάται από τη συνολική διαθέσιμη μνήμη στο σύστημα. Οι υπολογιστές που έχουν φαινόμενη μνήμη δεν εμφανίζουν την εναπομένουσα ελεύθερη μνήμη.

Οι μεταβλητές αφαιρούνται από τον χώρο εργασίας με τη συνάρτηση clear.

clear όνομα1 όνομα2 όνομα3

Σε μερικές περιπτώσεις, αφαιρώντας μία μεταβλητή μπορεί να μην αλλάξει καθόλου η τιμή της ελεύθερης μνήμης που εμφανίζεται στην οθόνη. Αυτό γιατί η συνάρτηση who εμφανίζει το ποσό της συνεχόμενης παραμένουσας ελεύθερης μνήμης. Έτσι, αφού η ελεύθερη μνήμη εξαρτάται από τη "θέση" της μεταβλητής στο χώρο εργασίας, αφαιρώντας λοιπόν μία μεταβλητή μπορεί να αυξηθεί ή όχι το εμφανιζόμενο εναπομένον ποσό. Εκείνο το σημείο που πρέπει λοιπόν να επισημάνουμε είναι ότι η διαθέσιμη ελεύθερη μνήμη μπορεί να είναι περισσότερη από αυτή που εμφανίζεται με τις συναρτήσεις who ή whos.

Όλοι οι υπολογισμοί στο MATLAB είναι διπλής ακριβείας. Ωστόσο, η έξοδος στην οθόνη μπορεί να διαφοροποιηθεί όπως θέλουμε. Η εξορισμού εμφάνιση μη ακεραίων αριθμών περιέχει τέσσερα ψηφία μετά το δεκαδικό σημείο. Αυτό μπορεί να αλλάξει χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση format (σχήμα 7). Όταν

λοιπόν μία συγκεκριμένη φόρμα έχει προσδιοριστεί, αυτή παραμένει μέχρι να αλλαχθεί με χρησιμοποίηση πάλι της συνάρτησης format.

| | |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>>>pi ans= 3.1416</pre> | <div style="background-color: yellow; border: 1px solid black; padding: 2px;">5 ψηφία εξορισμού</div> |
| <pre>>>format long; pi ans= 3.14159265358979</pre> | <div style="background-color: yellow; border: 1px solid black; padding: 2px;">15 ψηφία συνολικά</div> |
| <pre>>>format short e; pi ans= 3.1416e+000</pre> | <div style="background-color: yellow; border: 1px solid black; padding: 2px;">5 δεκαδικά ψηφία συνολικά</div> |
| <pre>>>format long e; pi ans= 3.141592653589793e+000</pre> | <div style="background-color: yellow; border: 1px solid black; padding: 2px;">15 δεκαδικά ψηφία συνολικά</div> |

Σχήμα 7

```
>>WHO
???Undefined function or variable
Symbol in question ==> WHO

>>Who
???Undefined function or variable
Symbol in question ==> Who
```

Σχήμα 8 : Παίζουν ρόλο τα μικρά ή κεφαλαία γράμματα στα ονόματα των συναρτήσεων.

2: Πράξεις πινάκων

Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας τις βασικές έννοιες που σχετίζονται με το χειρισμό μητρών και διανυσμάτων.

Η βασική μονάδα υπολογισμών είναι η μήτρα. Τα διανύσματα και οι βαθμοτές (scalar) θεωρούνται ειδικές περιπτώσεις των μητρών. Οι μήτρες εκφράζονται με

αγκύλες, [.] .Τα στοιχεία των στηλών χωρίζονται με κενά ή με κόμματα, ενώ αυτά των γραμμών χωρίζονται με το ελληνικό ερωτηματικό ή με το <enter>. Η εισαγωγή ενός μιγαδικού κι ενός πραγματικού πίνακα φαίνεται στο σχήμα 9.

```
>>A=[1,-4*j,sqrt(2);
      log(-1) sin(pi/2) cos(pi/3)
      asin(0.5),acos(0.8) exp(0.8)]

A=
  1.0000          0-4.0000i    1.4142
          0+3.1416i    1.0000    0.5000
  0.5236          0.6435    2.2255

>>A=[1 2 ; 4 5]

A=
     1     2
     4     5
```

Σχήμα 9

Παρατηρούμε ότι διαφορετικοί συνδυασμοί κενών και κομμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να χωρίσουν τις στήλες, ενώ διαφορετικοί συνδυασμοί ελληνικών ερωτηματικών και <enter> μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να χωρίσουν τις γραμμές.

Οι βασικές πράξεις μεταξύ μητρών, όπως πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, transpose (ανάστροφη μήτρα),ύψωση σε δύναμη, κλπ.,είναι πράξεις στοιχείου προς στοιχείο. Οι μαθηματικοί τελεστές που χρησιμοποιούνται στις πράξεις των μητρών βρίσκονται στον πίνακα 1. Τη διαίρεση των μητρών δεν θα την συζητήσουμε, ενημερωτικά όμως αναφέρουμε ότι το MATLAB έχει δυνατότητα αριστερής και δεξιάς διαίρεσης.

Οι πράξεις μεταξύ μητρών απαιτούν ώστε οι διαστάσεις τους να είναι συμβατές. Δηλαδή αν μία μήτρα A είναι $n \times m$ διαστάσεων και μία άλλη μήτρα B είναι διαστάσεων $r \times l$, τότε θα πρέπει :

- a) $n=r$ και $m=l$ (για πρόσθεση)
- b) $m=r$ (για πολλαπλασιασμό)

Μια ειδική περίπτωση πολλαπλασιασμού μεταξύ μητρών είναι ο πολλαπλασιασμός μήτρας-βέκτορα.

Υποθέστε ότι το b είναι ένας βέκτορας(διάνυσμα) μήκους p. Ο πολλαπλασιασμός του βέκτορα b με την μήτρα A, όπου το A είναι μία $n \times m$ μήτρα, επιτρέπεται μόνο αν $m=p$. Έτσι, $y=A*b$ είναι ένας $n \times 1$ βέκτορας, γιατί

$[(n \times m) * (m \times 1)] = (n \times 1)$. Παραδείγματα τριών βασικών πράξεων μήτρας-βέκτορα, δίνονται στο σχήμα 10.

```

>>A=[1 3 ; 5 9] ; B=[4 -7 ; 10 0] ;
>>A+B
ans=
    5  -4
   15   9
>>b=[1 ; 5] ;
>>A*b
ans=
   16
   50
>>A'
ans=
    1    5
    3    9

```

Σχήμα 10

Η ανάστροφη μήτρα συντάσσεται με απόστροφο ('). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανάστροφη μήτρα και την πράξη του πολλαπλασιασμού για να δημιουργήσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο βέκτορα με τον ακόλουθο τρόπο. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτή μήτρα (δηλαδή μήτρα που περιέχει μόνο μία γραμμή ή μία στήλη). Υποθέτουμε ότι w και u είναι $m \times 1$ βέκτορες. Τότε το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από το $w' * u$. Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να υπολογιστεί παρόμοια ως $w * u'$. Το εξωτερικό γινόμενο δύο $m \times 1$ διανυσμάτων, είναι μία $m \times m$ μήτρα τάξης (βαθμού) 1.

Οι βασικές πράξεις μητρών (στοιχείου προς στοιχείο), μπορούν να τροποποιηθούν με κάποιο τελεστή, ο οποίος προηγείται του τελεστή μιας πράξης τους. Οι τροποποιημένες πράξεις μητρών είναι γνωστές ως πράξεις πινάκων. Οι πιο συνηθισμένοι τελεστές πινάκων δίνονται στον πίνακα 3.

Υποθέτουμε ότι A και B είναι μήτρες 2×2 , όπου είναι οι εξής :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

Τότε χρησιμοποιώντας τον τελεστή πολλαπλασιασμού πινάκων παίρνουμε.

$$A * B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \bullet$$

```
>>x=[5 ; pi ; sin(pi/2)]; y=[exp(-0.5) ; -13 ; pi^2];
>>x' * y

ans=
    -27.9384

>>x * y'

ans=
    3.0327    -65.0000    49.3480
    1.9055    -40.8407    31.0063
    0.6065    -13.0000     9.8696
```

Εσωτερικό
Εξωτερικό
γινόμενο

Σχήμα 10 :
Εσωτερικά
και
εξωτερικά
γινόμενα.

Τα

στοιχεία του $A*B$ είναι τα γινόμενα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B . Ένα αριθμητικό παράδειγμα δίνεται στο σχήμα 11.

Τελος, πριν αναφερθούμε στο πολύ σημαντικό θέμα των γραφικών, θα εισάγουμε την έννοια της στήλης (column notation). Η έννοια της στήλης, δείχνεται στο σχήμα 12, μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα διάνυσμα στήλης το οποίο περιέχει όλα τα νούμερα από μία αρχική τιμή x_i , έως μία τελική τιμή x_f , με ένα συγκεκριμένο βήμα αύξησης, dx .

```

>>A=[1;2;3]; B=[-6;7;10];
>>A.*B
ans=
    -6
    14
    30

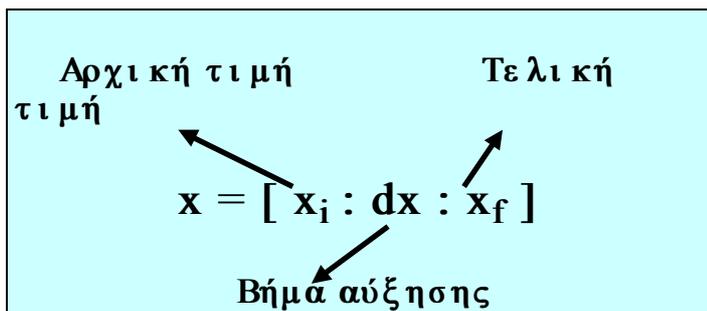
>>A.^2
ans=
     1
     4
     9

```

Πολ/σμός
πι νάκων

Λύναμη πι νάκων

Σχήμα 11: Πράξεις πι νάκων.



Σχήμα 12

Μπορούμε πολύ εύκολα να δημιουργήσουμε διανύσματα χρησιμοποιώντας την έννοια της στήλης, και όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι πολύ χρήσιμα στη δημιουργία x-y διαγραμμάτων. Υποθέτουμε ότι ο σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε το διάγραμμα του $y=x\sin(x)$ προς το x, για $x=0,0.1,0.2,\dots,1.0$. Το πρώτο μας βήμα είναι να φτιάξουμε έναν πίνακα με x-y δεδομένα. Έτσι, όπως φαίνεται στο σχήμα 13, από ένα επιθυμητό διάνυσμα x, υπολογίζεται το διάνυσμα $y(x)$ χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιασμό πι νάκων. Στη συνέχεια είναι πολύ εύκολο να σχεδιάσουμε το x-y διάγραμμα.

```

>>x=[0:0.1:1]'; y=x.*sin(x);
>>[x y]

ans=
      0      0
  0.1000  0.0100
  0.2000  0.0397
  0.3000  0.0887
  0.4000  0.1558
  0.5000  0.2397
  0.6000  0.3388
  0.7000  0.4510
  0.8000  0.5739
  0.9000  0.7050
  1.0000  0.8415

```

Σχήμα 13

3: Γραφικά

Το MATLAB χρησιμοποιεί οθόνη γραφικών για να εμφανίσει τα διαγράμματα. Μερικές διαφοροποιήσεις στους υπολογιστές επιτρέπουν την ταυτόχρονη εμφάνιση της οθόνης γραφικών και της οθόνης εντολών, ενώ κάποιες άλλες δεν την επιτρέπουν. Η οθόνη γραφικών δημιουργείται αυτόματα όταν φτιάχνεται ένα διάγραμμα (π.χ με τη συνάρτηση plot). Πατώντας οποιοδήποτε πλήκτρο του πληκτρολογίου μπορούμε να περάσουμε από την οθόνη γραφικών στην οθόνη εντολών. Με τη συνάρτηση clg(clear graph) καθαρίζουμε την οθόνη γραφικών, ενώ με τη συνάρτηση shg(show graph) περνάμε από την οθόνη εντολών στην οθόνη γραφικών. Υπάρχουν δύο βασικές ομάδες συναρτήσεων γραφικών. Η πρώτη ομάδα συναρτήσεων, η οποία βρίσκεται στον πίνακα 3, προσδιορίζει τον τύπο του διαγράμματος, ενώ η δεύτερη ομάδα συναρτήσεων, η οποία βρίσκεται στον πίνακα 4, μας επιτρέπει να διαμορφώσουμε κατάλληλα τα διαγράμματα προσθέτοντας τίτλους και κείμενο, καθώς και ν'αλλάξουμε την κλίμακα των αξόνων ή να εμφανίσουμε πολλαπλά διαγράμματα σε υποπαράθυρα.

| | |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| plot(x,y) | Τυπώνει το διάνυσμα x προς το διάνυσμα y. |
| semilogx(x,y) | Τυπώνει το διάνυσμα x προς το διάνυσμα y. Ο άξονας x είναι λογαριθμικός. Ο άξονας y είναι γραμμικός. |
| semilogy(x,y) | Τυπώνει το διάνυσμα x προς το διάνυσμα y. Ο άξονας y είναι λογαριθμικός. Ο άξονας x είναι γραμμικός |
| loglog(x,y) | Τυπώνει το διάνυσμα x προς το διάνυσμα y. Οι άξονες είναι και οι δύο λογαριθμικοί. |

ΠΙΝΑΚΑΣ 4

| | |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| title('text') | Βάζει κείμενο στο πάνω μέρος του διαγράμματος. |
| xlabel('text') | Μπαίνει κείμενο στον x-άξονα. |
| ylabel('text') | Μπαίνει κείμενο στον y-άξονα. |
| text(p1,p2,'text','sc') | Μπαίνει κείμενο στη θέση p1,p2 της οθόνης. Φυσικά τα p1 και p2 εξαρτώνται από τα όρια x-y της κάθε γραφικής παράστασης. |
| subplot | Υποδιαίρονται τα παράθυρα γραφικών σε υποπαράθυρα. |
| grid | Βάζει διακεκομμένες γραμμές στο τρέχων γράφημα. |

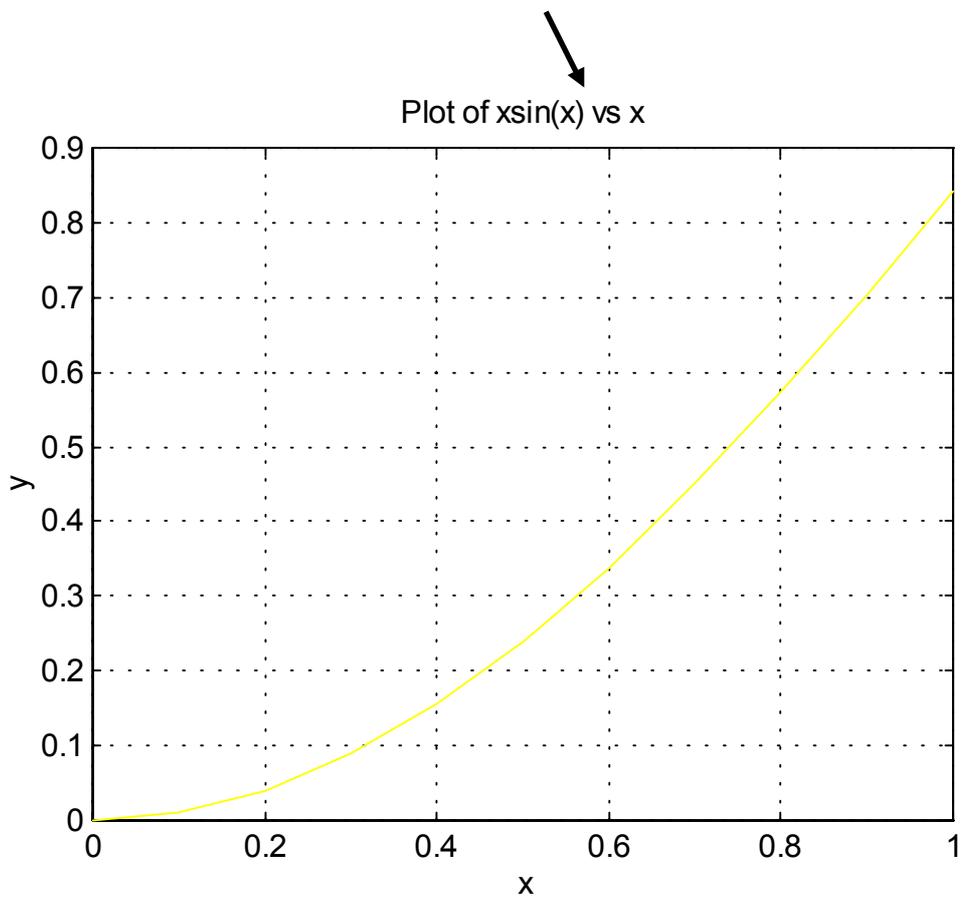
Το συνηθισμένο x-y διάγραμμα δημιουργείται με την συνάρτηση plot (σχήμα 14) . Η κλίμακα των αξόνων και ο τύπος γραμμής(.) επιλέγονται αυτόματα. Οι διαθέσιμοι τύποι γραμμών φαίνονται στον πίνακα 5. Ο τύπος γραμμών αλλάζει αυτόματα,εκτός κι αν προσδιορίζεται. Η χρήση της συνάρτησης text και η αλλαγή του τύπου γραμμής δείχνονται στο σχήμα 15.

Πίνακας 5

| | |
|------|-----------------------|
| - | Συμπαγής γραμμή |
| -- | Διακεκομμένη γραμμή |
| : | Γραμμή με τελείες |
| -. . | Γραμμή παύλας-τελείας |

```
>>x=[0:0.1:1]';  
>>y=x.*sin(x);  
>>plot(x,y)  
>>title('Plot of xsin(x) vs x')  
>>xlabel('x')  
>>ylabel('y')  
>>grid
```

Τίτλος

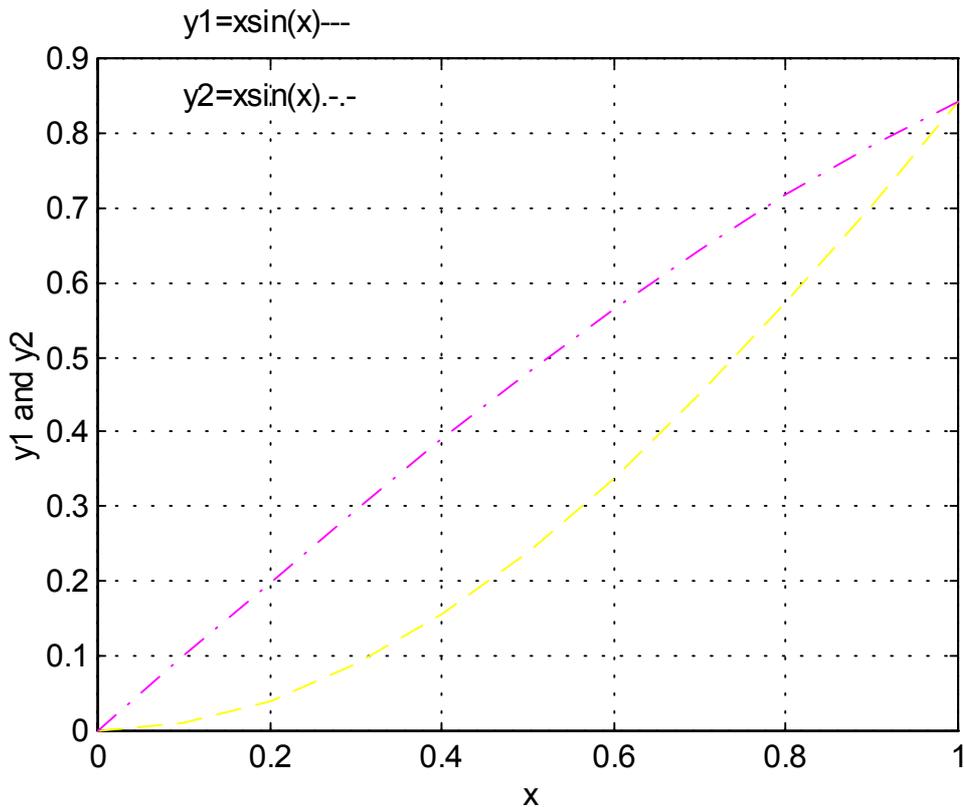


Σχήμα 14: Γραφική παράσταση του $x\sin(x)$ προς x .

```

>>x=[0:0.1:1]';
>>y1=x.*sin(x);y2=sin(x);
>>plot(x,y1,'--',x,y2,'-.')
>>text(0.1,0.95,'y1=xsin(x)---')
>>text(0.1,0.85,'y2=xsin(x).-.')
>>xlabel('x'),ylabel('y1 and y2'),grid

```



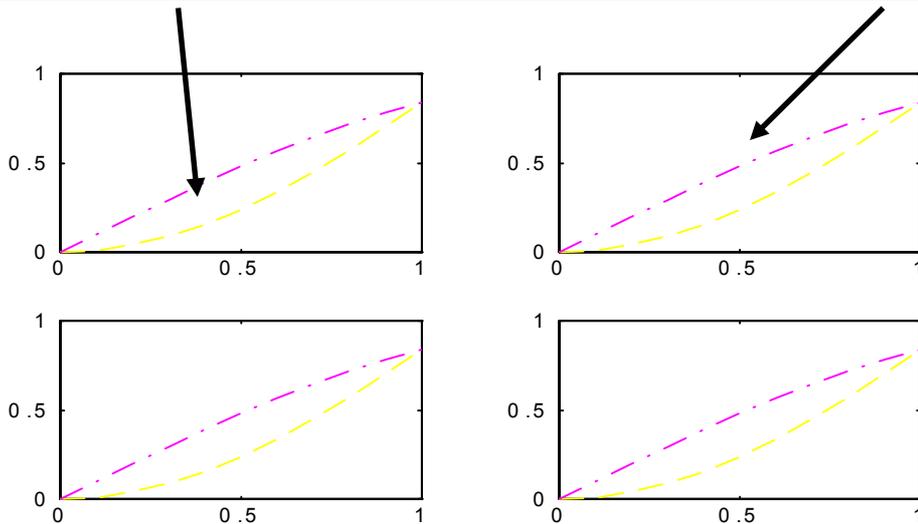
Σχήμα 15 : Βασικό x-y διάγραμμα Πολλαπλών γραμμών.

Οι άλλες συναρτήσεις γραφικών loglog, semilogx, και semilogy χρησιμοποιούνται με παρόμοιο τρόπο με την plot.

Η οθόνη γραφικών μπορεί να υποδιαιρεθεί σε μικρότερα υποπαράθυρα. Η συνάρτηση subplot(mnp) την υποδιαιρεί σε mnp μικρότερα υποπαράθυρα. Μπορούμε να έχουμε αρκετά υποπαράθυρα. Ο ακέραιος p προσδιορίζει τον αριθμό παραθύρου. Στο σχήμα 16α και στο σχήμα 16β βλέπουμε δύο περιπτώσεις της συνάρτησης subplot.

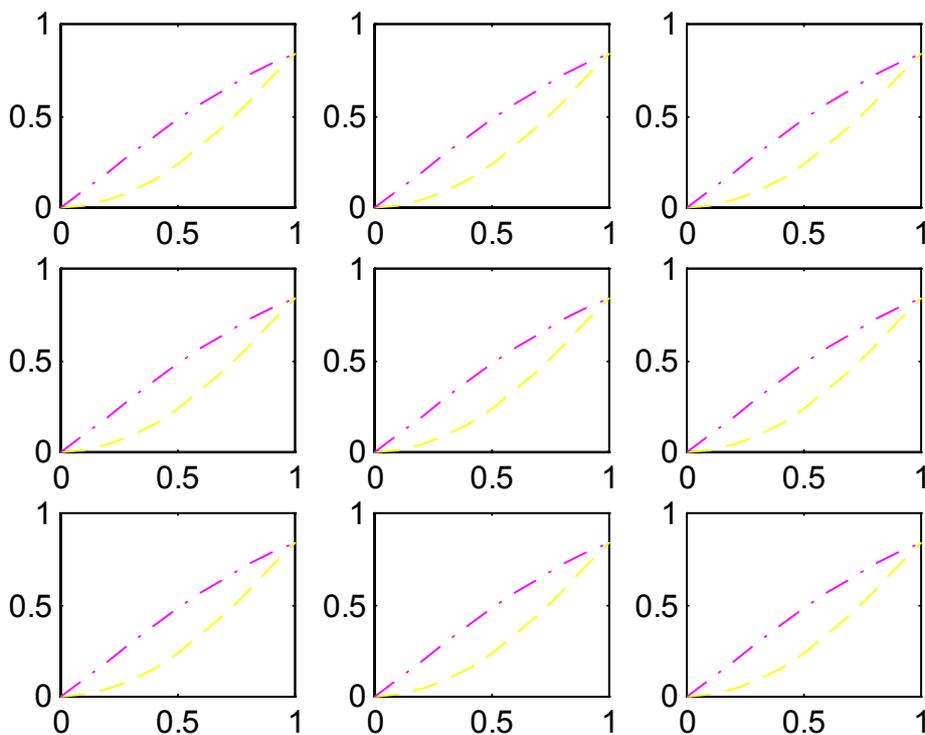
```
subplot(221),plot(x,y1,'--',x,y2,'-.')
```

```
subplot(222),plot(x,y1,'--',x,y2,'-.')
```



Σχήμα 16 :α) 2x2 υποδιείρεση της οθόνης γραφικών,β) 3x3
4. Μαρχεία του MATLAB

Τα Μαρχεία είναι συνηθισμένα ASCII αρχεία κειμένου και δημιουργούνται χρησιμοποιώντας έναν editor κειμένου. Ένα Μαρχείο είναι μία ακολουθία δηλώσεων και συναρτήσεων, οι οποίες εκτελούνται από το επίπεδο διαταγών του MATLAB ,γράφοντας απλώς το όνομα του αρχείου(χωρίς την επέκταση .m). Αυτά τα αρχεία μπορεί να περιέχουν κι άλλα Μαρχεία.Έτσι το MATLAB εκτελεί όλες τις εντολές του αρχείου χωρίς



να περιμένει την εισαγωγή μεταβλητών κι αυτό γιατί χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές του χώρου εργασίας.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y(t)=\sin at$, όπου το a είναι μία μεταβλητή που θέλουμε να αλλάζει. Δημιουργούμε το αρχείο `plotdata.m` (σχήμα 17).

```
plotdata.m
%This is a script to plot the function
y=sin(alpha*t).
%
%The value of alpha must exist in the workspace
prior
%to invoking the script.
%
t=[0:0.01:1];
y=sin(alpha*t);
plot(t,y)
xlabel('Time[sec]')
ylabel('y(t)=sin(alpha*t)')
grid
```

>>alpha=50;
>>plotdata

Σχήμα 17

```
>>help plotdata

This is a script to plot the function y=sin(alpha*t).

The value of alpha must exist in the workspace prior
to invoking the script.
```

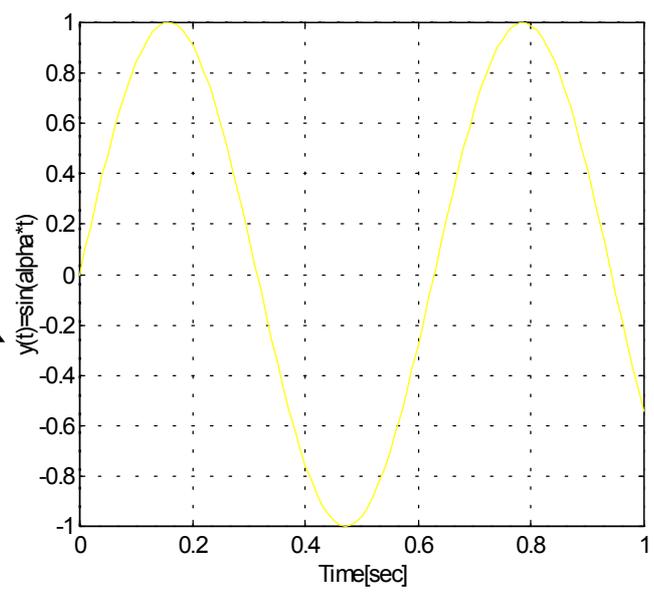
Σχήμα 18

Τα Μαρχεία πρέπει να είναι καλά δομημένα με σχόλια. Τα σχόλια αρχίζουν με το `%`. Με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `help` θα εμφανιστούν στην οθόνη μας σχόλια που περιγράφουν τη λειτουργία του αρχείου (σχήμα 18).

Εύκολα γίνεται κατανοητό ότι μετά τον ορισμό της μεταβλητής από το επίπεδο διαταγών του MATLAB, τα επιθυμητά διαγράμματα δημιουργούνται αυτόματα μετά την εκτέλεση του αντίστοιχου αρχείου (σχήμα 19).

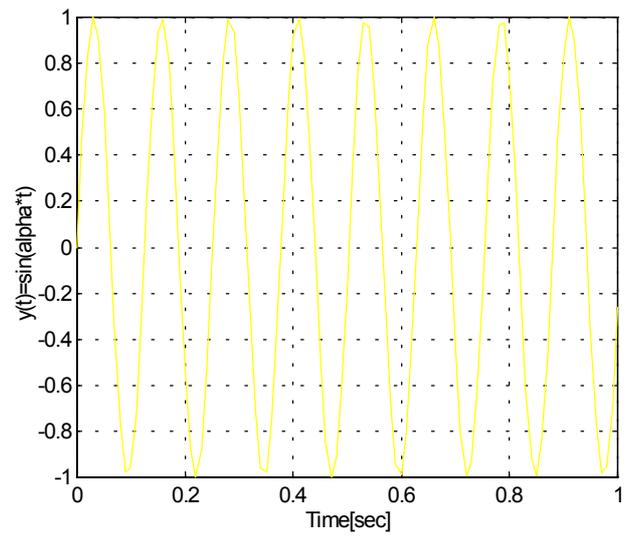
επίπεδο διαταγής

```
>>alpha=10;  
>>plotdata
```



όνομα Μαρχείου

```
>>alpha=50;plotdata
```



Σχήμα 19: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $y(t)=\sin at$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ο σχεδιασμός και η ανάλυση των συστημάτων ελέγχου βασίζεται σε μαθηματικά μοντέλα σύνθετων φυσικών συστημάτων. Τα μαθηματικά μοντέλα, το οποία προκύπτουν από τους φυσικούς νόμους της διαδικασίας, περιγράφονται γενικά από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Ευτυχώς, πολλά φυσικά συστήματα συμπεριφέρονται γραμμικά γύρω από ένα σημείο λειτουργίας, μέσα σε ορισμένα όρια των μεταβλητών, και έτσι είναι δυνατό να προσεγγίσουμε γραμμικά τα φυσικά συστήματα. Το ανάπτυγμα των σειρών Taylor χρησιμοποιείται γενικά στη διαδικασία γραμμικοποίησης του συστήματος. Η γραμμική προσέγγιση των φυσικών συστημάτων περιγράφεται με

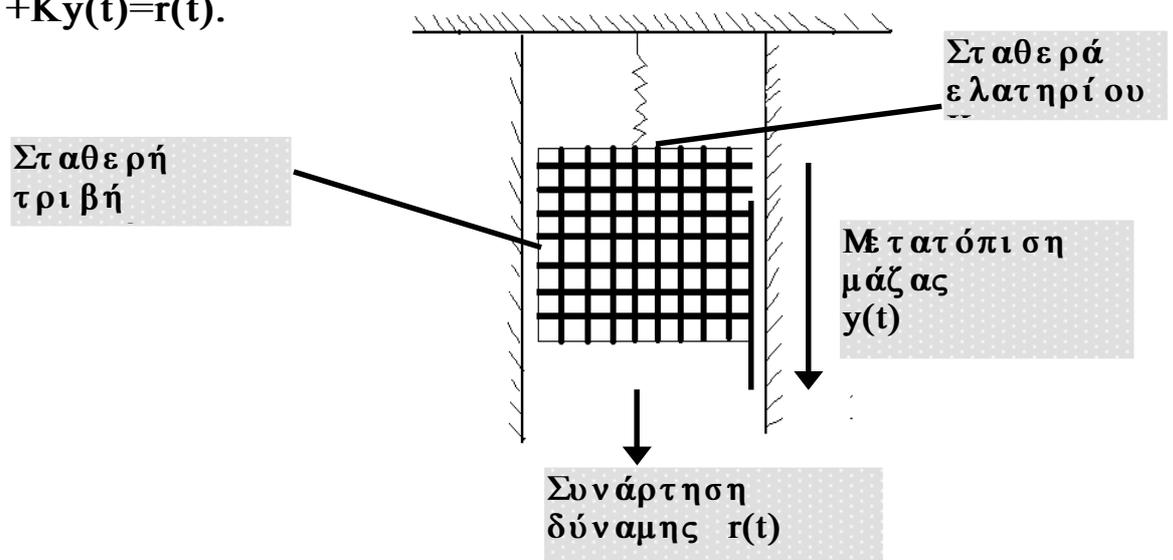
μία γραμμική, σταθερού συντελεστή συνηθισμένη διαφορική εξίσωση. Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μία μέθοδος εύρεσης της λύσης των διαφορικών εξισώσεων. Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε την περιγραφή εισόδου-εξόδου ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου (LTI=linear time-invariant) συστήματος, σε μορφή συνάρτησης μεταφοράς. Οι εφαρμογές των πολλών “κλασσικών” και “μοντέρνων” εργαλείων σχεδιασμού και ανάλυσης συστημάτων ελέγχου βασίζονται στα LTI μαθηματικά μοντέλα. Το MATLAB μπορεί να χρησιμοποιηθεί με LTI συστήματα που περιγράφονται με συναρτήσεις μεταφοράς ή με εξισώσεις σταθερού-χώρου.

Σ’ αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε δείχνοντας το τρόπο που το MATLAB βοηθά στην ανάλυση ενός τυπικού μαθηματικού μοντέλου ελατηρίου-μάζας με απόσβεση, ενός μηχανικού συστήματος. Χρησιμοποιώντας ένα Μ αρχείο, θα αναλύσουμε την επίδραση της φυσικής συχνότητας και της απόσβεσης στη μη εξαναγκασμένη απόκριση μετατόπισης μάζας. Αυτή η ανάλυση χρησιμοποιεί το γεγονός ότι έχουμε μία αναλυτική λύση που περιγράφει τη μη εξαναγκασμένη χρονική απόκριση μετατόπισης μάζας.

1. Σύστημα μάζας-ελατηρίου

Ένα μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου φαίνεται στο σχήμα 20. Η κίνηση της μάζας, η οποία δηλώνεται από την $y(t)$, περιγράφεται από την εξής διαφορική εξίσωση.

$$My(t)'' + fy(t)' + Ky(t) = r(t).$$



Σχήμα 20 : Σύστημα μάζας-ελατηρίου.

Η μη εξαναγκασμένη δυναμική απόκριση, $y(t)$, αυτού του μηχανικού συστήματος είναι :

$$y(t) = \frac{y(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta)$$

όπου $\theta = \cos^{-1}\zeta$. Η αρχική μετάθεση είναι $y(0)$. Η απόκριση του μεταβατικού συστήματος είναι υποαποσβεννημένη όταν $\zeta < 1$, υπεραποσβεννημένη όταν $\zeta > 1$, και κρίσιμα αποσβεννημένη όταν $\zeta = 1$. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το MATLAB για να πάρουμε τη μη εξαναγκασμένη χρονική απλοκρίση της μετατόπισης μάζας με αρχική μετατόπιση $y(0)$. Υποθέτουμε την υποαποσβεννημένη και την υπεραποσβεννημένη περίπτωση :

- Περίπτωση 1^η : $y(0)=0.15\text{m}$, $\omega^n = \sqrt{2} \text{ rad/sec}$, $\zeta_1 = 3/(2\sqrt{2})$
($K/M=2, f/M=3$) .
- Περίπτωση 2^η : $y(0)=0.15\text{m}$, $\omega^n = \sqrt{2} \text{ rad/sec}$, $\zeta_2 = 1/(2\sqrt{2})$
($K/M=2, f/M=1$) .

Οι εντολές του MATLAB δημιουργούν ένα διάγραμμα της μη εξαναγκασμένης απόκρισης (σχήμα 21). Οι μεταβλητές $y(0)$, ω_n , ζ_1 και ζ_2 εισάγονται στο χώρο εργασίας από το επίπεδο διαταγών. Τότε το αρχείο `unforced.m` εκτελείται για να δημιουργήσει το επιθυμητό διάγραμμα. Μπορούμε να ανακαλύψουμε τις επιδράσεις της φυσικής συχνότητας και της απόσβεσης στη χρονική απόκριση, εισάγοντας απλά νέες τιμές ω_n , ζ_1 και ζ_2 στο επίπεδο διαταγών και στη συνέχεια ξανατρέχουμε το `unforced.m`. Το διάγραμμα της χρονικής απόκρισης φαίνεται στο σχήμα 22. Στη συνέχεια αν συσχετίσουμε την φυσική συχνότητα και την απόσβεση με τη σταθερά του ελατηρίου K και με τη τριβή f , μπορούμε να αναλύσουμε τα αποτελέσματα των K και f στην απόκριση.

```
>>y0=0.15; wn=sqrt(2);
>>zeta1=3/(2*sqrt(2)); zeta2=1/(2*sqrt(2));
>>t=[0: 0.1: 10];
>>unforced
```

`unforced.m`

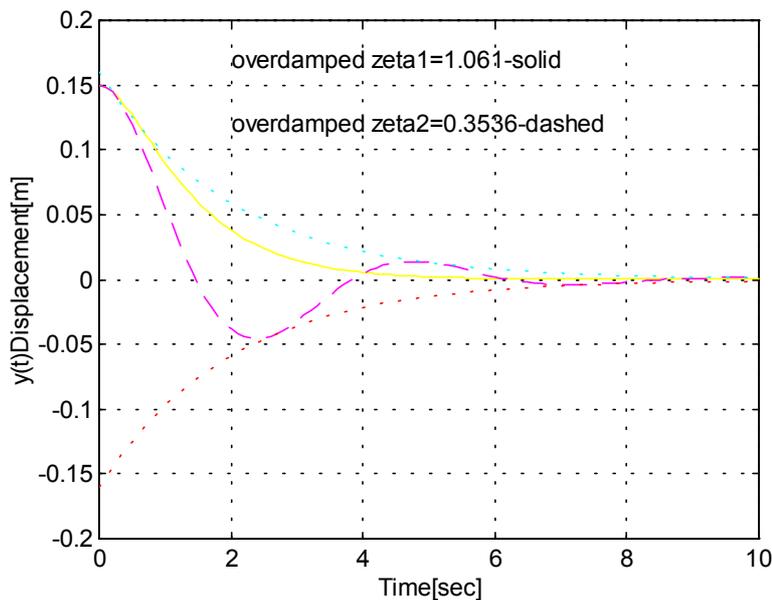
Σχήμα 21: Μ-αρχείο που αναλύει το σύστημα μάζα-ελατήριο.

```

%Compute Unforced Response to an INitial Condition
%
%Give:zeta1,zeta2,y0,wn,t
t1=acos(zeta1)*ones(1,length(t));
t2=acos(zeta2)*ones(1,length(t));
c1=(y0/sqrt(1-zeta1^2));c2=(y0/sqrt(1-zeta2^2));
y1=c1*exp(-zeta1*wn*t).*sin(wn*sqrt(1-zeta1^2)*t+t1);
y2=c2*exp(-zeta2*wn*t).*sin(wn*sqrt(1-zeta2^2)*t+t2);
%
bu=c2*exp(-zeta2*wn*t);bl=-bu;
%
plot(t,y1,'-',t,y2,'--',t,bu,':',t,bl,':'),grid
xlabel('Time[sec]');ylabel('y(t)Displacement[m]')
text(2,0.17,['overdamped zeta1=',num2str(zeta1),'-solid'],'sc')

text(2,0.12,['overdamped zeta2=',num2str(zeta2),'-dashed'])

```



Γενικά, όταν εξομοιώνουμε ένα ανατροφοδοτούμενο κλειστό σύστημα ελέγχου, του βάζουμε αρκετές διαφορετικές εισόδους, καθώς και αρκετές διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Έτσι δεν είναι εφικτή μια αναλυτική λύση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε το MATLAB για να υπολογίσουμε τη λύση αριθμητικά και να την εμφανίσουμε γραφικά.

Σχήμα 22: Μη εξαναγκασμένη απόκριση του αποσβεννόμενου συστήματος μάζας-ελατηρίου.

2. Συναρτήσεις μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι μία περιγραφή εισόδου-εξόδου ενός LTI συστήματος. Σχετίζεται το μετασχηματισμό Laplace της μεταβλητής εξόδου, με το μετασχηματισμό Laplace της μεταβλητής εισόδου με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Θεωρίστε το LTI σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$, όπου :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

όπου $m \leq n$, και όλοι οι κοινοί παράγοντες έχουν απλοποιηθεί. Οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή του $G(s)$ λέγονται *μηδενικά* του συστήματος, ενώ οι ρίζες του πολυωνύμου του παρανομαστή λέγονται *πόλοι*. Θέτοντας το πολυώνυμο του παρανομαστή ίσο με το μηδέν, παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:
 $s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 = 0$.

Η μεταβατική απόκριση του συστήματος συνδέεται άμεσα με τη θέση των πόλων και των μηδενικών στο s -επίπεδο. Μπορούμε με το MATLAB να αναλύσουμε συστήματα που περιγράφονται με συναρτήσεις μεταφοράς. Εφ' όσον η συνάρτηση μεταφοράς είναι λόγος πολυωνύμων ξεκινάμε με το πώς το MATLAB χειρίζεται τα πολυώνυμα, ενώ πρέπει να θυμόμαστε ότι το να δουλεύουμε με συναρτήσεις μεταφοράς σημαίνει πως και το πολυώνυμο του αριθμητή και του παρανομαστή πρέπει να προσδιοριστούν.

Στο MATLAB τα πολυώνυμα αναπαρίστανται με διανύσματα-γραμμής που περιέχουν τους συντελεστές του πολυωνύμου κατά φθίνουσα σειρά. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο :

$$p(s) = s^3 + 3s^2 + 4$$

εισάγεται όπως δείχνει το σχήμα 23.

Σχήμα 23 : Εισαγωγή πολυωνύμου και υπολογισμός των

```
>>p=[1 3 0 4];
>>r=roots(p)

r=
-3.3553e+00
 1.7765e-01 + 1.0773e+00i
 1.7765e-01 - 1.0773e+00i

>>p=poly(r)

p=
 1.0000  3.0000  0.0000-0.0000i  4.0000+0.0000i
```

$p(s)=s^3+3s^2+4$

Υπολογίζει τις ρίζες του $p(s)=0$.

Παραγωγή του πολυωνύμου από τις ρίζες.

ρίζων του.

Παρατηρήστε πως κι αν ακόμα ο συντελεστής κάποιου s είναι μηδέν, περιέχεται στον ορισμό εισόδου του $p(s)$. Αν το p είναι ένα διάνυσμα-γραμμής που περιέχει τους συντελεστές του $p(s)$ κατά φθίνουσα σειρά, τότε το $roots(p)$ είναι ένα διάνυσμα-στήλης που περιέχει τις ρίζες του πολυωνύμου. Αντίθετα, αν το r είναι ένα διάνυσμα-στήλης που περιέχει τις ρίζες του πολυωνύμου, τότε το $poly(r)$ είναι ένα διάνυσμα-γραμμής με τους συντελεστές του πολυωνύμου κατά φθίνουσα σειρά.

Ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων γίνεται με τη συνάρτηση $conv$. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να αναπτύξουμε το πολυώνυμο $n(s)$, όπου :

$$n(s)=(3s^2+2s+1)(s+4).$$

Η χρησιμοποιούμενη εντολή του MATLAB είναι η $conv$ (σχήμα 24). Έτσι, το αναπτυγμένο πολυώνυμο είναι: $n(s)=3s^3+14s^2+9s+4$.

```
>>p=[3 2 1]; q=[1 4];
>>n=conv(p,q)

n=
 3  14  9  4

>>value=polyval(n,-5)
value=
-66
```

Υπολογισμός του $n(s)$ για $s=-5$.

Σχήμα 24

Η συνάρτηση *polyval* υπολογίζει τη τιμή του πολυωνύμου για α δοσμένη τιμή της μεταβλητής. Το πολυώνυμο $n(s)$ έχει την τιμή -66, γιατί $n(-5)=-66$.

Στο επόμενο παράδειγμα θα σχεδιάσουμε τις θέσεις των πόλων και των μηδενικών στο μιγαδικό επίπεδο. Αυτό πραγματοποιείται με τη συνάρτηση *pzmap*. Αν η *pzmap* συνάρτηση εκτελεστεί χωρίς ορίσματα στο αριστερό της μέρος ($[P,Z]=pzmap(num,den)$ όπου $G(s)=num/den$), τότε η γραφική παράσταση θα δημιουργηθεί αυτόματα.

Θεωρίστε τις εξής συναρτήσεις μεταφοράς :

$$G(s) = \frac{6s^2+1}{s^3+3s^2+3s+1}, \quad H(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+2i)(s-2i)(s+3)}$$

Χρησιμοποιώντας ένα Μαρχείο του MATLAB(σχήμα 25) ,μπορούμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά του $G(s)$, τη χαρακτηριστική εξίσωση του $H(s)$, και να διαιρέσουμε το $G(s)$ με το $H(s)$. Στη συνέχεια θα φτιάξουμε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του $G(s)/H(s)$ στο μιγαδικό επίπεδο(σχήμα 26).

```
%Pole-zero map of a transfer function G(s)/H(s).
%
numg=[6 0 1];deng=[1 3 3 1];
z=roots(numg)
p1=roots(deng)
n1=[1 1];n2=[1 2];d1=[1 2*i];d2=[1 -2*i];d3=[1 3];
numh=conv(n1,n2);denh=conv(d1,conv(d2,d3));
printsys(numh,denh)
num=conv(numg,denh);den=conv(deng,numh);
printsys(num,den)
pzmap(num,den)
title('Pole-Zero Map')
```

poles.m

$z =$

$$\begin{aligned} &0 + 0.4082i \\ &0 - 0.4082i \end{aligned}$$

Εξοδος στην οθόνη
μετά
την εκτέλεση του
poles.m

$p1 =$

$$\begin{aligned} &-1.0000 + 0.0000i \\ &-1.0000 - 0.0000i \\ &-1.0000 \end{aligned}$$

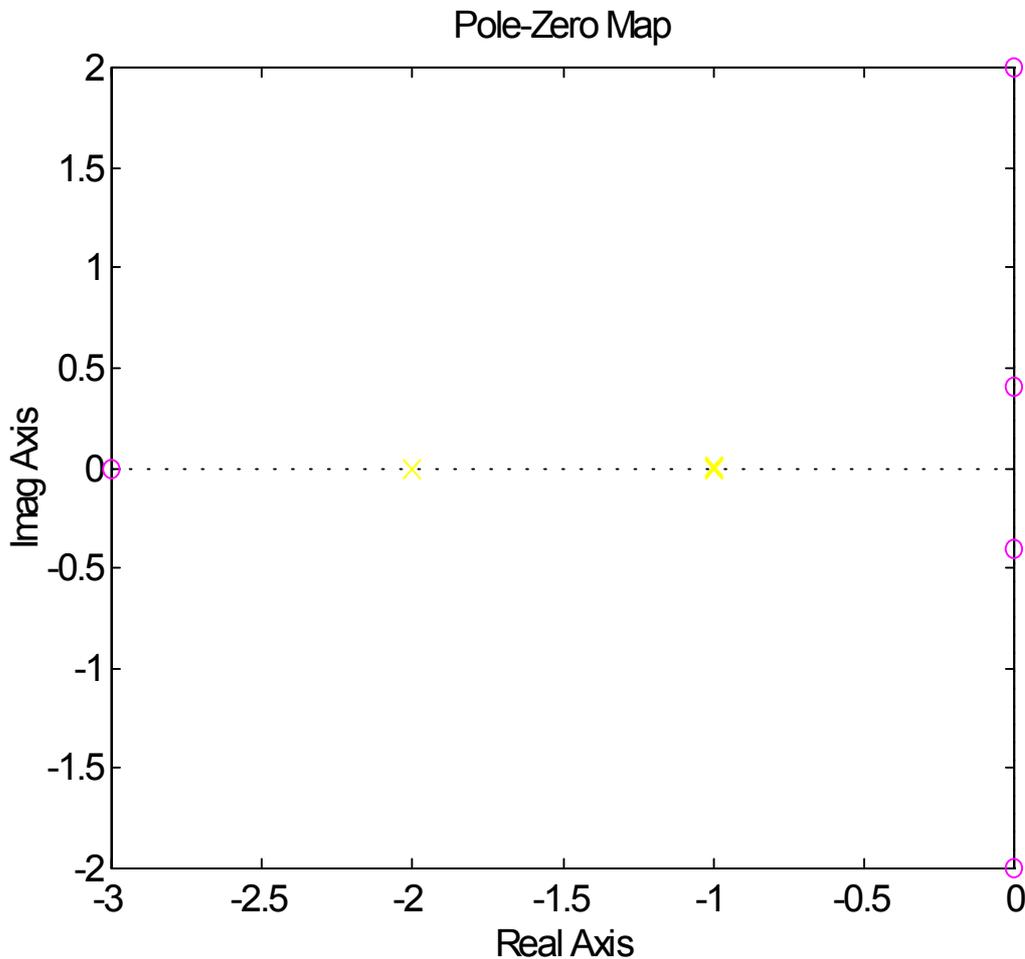
$\text{num/den} =$

$$\begin{array}{r} s^2 + 3s + 2 \\ \hline s^3 + 3s^2 + 4s + 12 \end{array}$$

$\text{num/den} =$

$$\begin{array}{r} 6s^5 + 18s^4 + 25s^3 + 75s^2 + 4s + 12 \\ \hline s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 16s^2 + 9s + 2 \end{array}$$

Σχήμα 25



Σχήμα 26

Στο σχήμα 26 φαίνονται καθαρά οι θέσεις των πέντε μηδενικών, αλλά εμφανίζονται μόνο δύο πόλοι. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει γιατί ξέρουμε ότι οι πόλοι πρέπει να είναι περισσότεροι ή ίσοι με τα μηδενικά. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση roots βλέπουμε ότι στη πραγματικότητα υπάρχουν τέσσερις πόλοι στο $s = -1$. Γίνεται επομένως ξεκάθαρο ότι πολλαπλοί πόλοι ή μηδενικά δεν διακρίνονται στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών. Στη συνέχεια δίνεται τροποποιημένο το αρχείο poles.m (σχήμα 27α). Στο σχήμα 27β υπάρχει η έξοδος στην οθόνη του H/Y όταν υπάρχουν ορίσματα στο

```
%Pole-zero map of a transfer function G(s)/H(s).
%
numg=[6 0 1];deng=[1 3 3 1];
z=roots(numg)
p1=roots(deng)
n1=[1 1];n2=[1 2];d1=[1 2*i];d2=[1 -2*i];d3=[1 3];
numh=conv(n1,n2);denh=conv(d1,conv(d2,d3));
printsys(numh,denh)
num=conv(numg,denh);den=conv(deng,numh);
printsys(num,den)
[P,Z]=pzmap(num,den)
```

Σχήμα 27α

z =

$$\begin{aligned} &0 + 0.4082i \\ &0 - 0.4082i \end{aligned}$$

p1 =

$$\begin{aligned} &-1.0000 + 0.0000i \\ &-1.0000 - 0.0000i \\ &-1.0000 \end{aligned}$$

num/den =

$$\frac{s^2 + 3s + 2}{s^3 + 3s^2 + 4s + 12}$$

num/den =

$$\frac{6s^5 + 18s^4 + 25s^3 + 75s^2 + 4s + 12}{s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 16s^2 + 9s + 2}$$

P =

$$\begin{aligned} &-2.0000 \\ &-1.0002 + 0.0002i \\ &-1.0002 - 0.0002i \\ &-0.9998 + 0.0002i \\ &-0.9998 - 0.0002i \end{aligned}$$

Z =

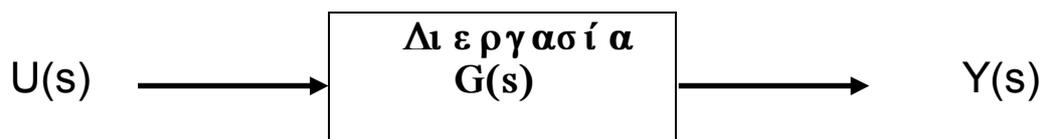
$$\begin{aligned} &-3.0000 \\ &0.0000 + 2.0000i \\ &0.0000 - 2.0000i \\ &0.0000 + 0.4082i \\ &0.0000 - 0.4082i \end{aligned}$$

αριστερό μέρος της συνάρτησης pzmap.

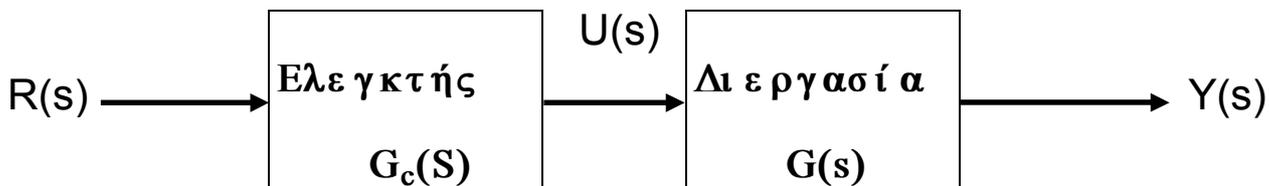
3. Μπλοκ διαγράμματα

Υποθέτουμε ότι έχουμε αναπτύξει κάποια μαθηματικά μοντέλα υπό μορφή συναρτήσεων μεταφοράς για κάποια διεργασία και τον ελεγκτή της, τα οποία αναπαρίσταται με $G(s)$ και $H(s)$ αντίστοιχα, και πιθανότατα να αναπτύξουμε αντίστοιχα μοντέλα και για τους αισθητήρες και τους ενεργοποιητές (actuators). Ο σκοπός μας είναι να συνδέσουμε όλα αυτά τα μοντέλα για να δημιουργήσουμε ένα σύστημα ελέγχου. Με εντολές του MATLAB θα κάνουμε μετασχηματισμούς μπλοκ διαγραμμάτων.

Η διεργασία του σχήματος 28 μαζί με έναν ελεγκτή μπορούν να σχηματίσουν ένα σύστημα ελέγχου ανοικτού βρόχου, αν μπουν σε σειρά (σχήμα 29). Με το MATLAB μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς με τη συνάρτηση *series* (σχήμα 30).



Σχήμα 28



Σχήμα 29

```
» numg=[1];deng=[500 0 0];
» numh=[1 1];denh=[1 2];
» [num,den]=series(numg,deng,numh,denh);
» printsys(num,den)

num/den =

      s + 1
-----
500 s^3 + 1000 s^2
```

$G_c(s)G(s)$

The transfer function result is shown as a fraction. The numerator is $s + 1$ and the denominator is $500 s^3 + 1000 s^2$. A yellow highlight is placed over the text $G_c(s)G(s)$ to the right of the fraction, with an arrow pointing from it to the numerator $s + 1$.

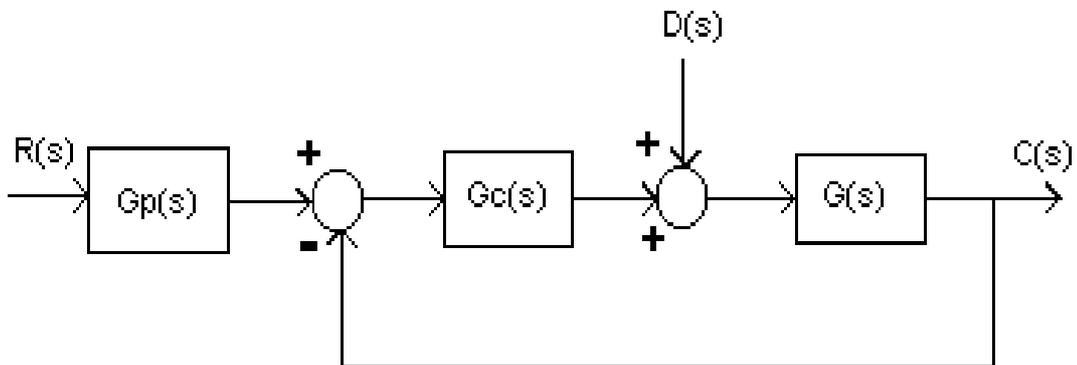
Σχήμα 30

ΕΥΡΩΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. Εισαγωγή

Σχεδιάζοντας ένα σύστημα ελέγχου υψηλής ακρίβειας με τη παρουσία αβεβαιότητας στη διεργασία, είναι ένα κλασικό πρόβλημα σχεδιασμού. Στα προηγούμενα κεφάλαια είχαμε υποθέσει γενικά ότι οι παράμετροι της διεργασίας είναι γνωστοί κι έτσι σχεδιάσαμε το σύστημα ελέγχου μας ανάλογα. Πρακτικά, αυτοί οι παράμετροι ποτέ δεν είναι ακριβώς γνωστοί και ίσως να μεταβάλλονται ελαφρώς κάθε φορά. Είναι επιθυμητό να σχεδιάσουμε ένα σύστημα ελέγχου που να παρουσιάζεται επαρκώς για αρκετές παραμέτρους. Ένα σύστημα ελέγχου είναι εύρωστο όταν διατηρεί ένα ικανοποιητικό επίπεδο ευστάθειας και παρουσίας για αρκετές παραμέτρους και παρεμβολές.

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχίζουμε να εξετάζουμε τον εύρωστο έλεγχο συστημάτων. Ειδικά θεωρούμε τον συχνά χρησιμοποιούμενο PID (αναλογικό-ολοκληρωτικό-διαφορικό) ελεγκτή. Το σύστημα ελέγχου μας με ανατροφοδότηση είναι της μορφής που φαίνεται στο σχήμα 100. Σημειώστε ότι το φίλτρο έχει ένα προ-φίλτρο $G_p(s)$. Δεν θα συζητηθεί όμως εδώ ο ρόλος του προφίλτρου στη συνεισφορά για τη βέλτιστη παρουσίαση.



Σχήμα 100

2. Εύρωστα ελεγχόμενα συστήματα από PID

Ο PID ελεγκτής έχει την εξής μορφή :

$$G_c(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s}$$

Σημειώστε ότι αυτός ο ελεγκτής δεν είναι ρητή συνάρτηση (δηλ., ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή

είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του πολυωνύμου του παρανομαστή). Θα είναι αρκετά δύσκολο αν προσπαθήσετε να βάλετε τον PID ελεγκτή στο MATLAB με το συνηθισμένο τρόπο για αριθμητή και παρανομαστή. Μιλώντας γενικά, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας μάλλον τη συνάρτηση conν παρά τη συνάρτηση series.

Ο σκοπός μας είναι να επιλέξουμε τις παραμέτρους $K_1, K_2,$ και K_3 ώστε να εκπληρώνονται οι προδιαγραφές παρουσίασης και να έχουμε τις επιθυμητές ιδιότητες ευρωστίας. Δυστυχώς δεν είναι αμέσως εμφανές πώς να επιλέγουμε τις παραμέτρους στον PID ελεγκτή ώστε να έχουμε αρκετά εύρωστα χαρακτηριστικά. Θα δείξουμε με ένα επεξηγηματικό παράδειγμα ότι είναι δυνατό να επιλέγουμε διαδοχικά παραμέτρους και να επαληθεύουμε την ευρωστία με εξομοίωση. Το MATLAB βοηθά σε αυτή τη διαδικασία αν ολόκληρος ο σχεδιασμός και η εξομοίωση γραφτούν σε Μαρχεία, το οποία εκτελούνται ξανά και ξανά. Μια λεπτομερής ανάπτυξη πάνω στο θέμα ανάλυσης και σχεδιασμού εύρωστου ελέγχου είναι πέρα από το σκοπό αυτών των σημειώσεων.

Παράδειγμα : Εύρωστος έλεγχος θερμοκρασίας

Θεωρήστε το σύστημα ελέγχου με ανατροφοδότηση του σχήματος 100, όπου :

$$G(s) = \frac{1}{(s+c_0)^2}$$

και η τιμή της c_0 είναι $c_0=1$.

Θα σχεδιάσουμε έναν αντισταθμιστή βασιζόμενο στο $c_0=1$ και να ελέγχει την ευρωστία με εξομοίωση. Οι προδιαγραφές σχεδιασμού μας είναι οι ακόλουθες :

1. χρόνος αποκατάστασης $T_s \leq 0.5$ seconds, και
2. βέλτιστη ITAE παρουσίαση για βηματική είσοδο.

Στο σχεδιασμό μας, δεν θα χρησιμοποιήσουμε προφίλτρο που να εκπληρεί τη δεύτερη προδιαγραφή, αλλά θα δείξουμε ότι αποδεκτή παρουσίαση (δηλ., μικρή υπερύψωση) μπορεί να επιτευχθεί αυξάνοντας το κέρδος του συστήματος.

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι :

$$T(s) = \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s^3 + (2+K_3)s^2 + (1+K_1)s + K_2}$$

Η σχετιζόμενη χαρακτηριστική εξίσωση είναι η :

$$1 + K^* \frac{s^2 + as + b}{s^3} = 0,$$

όπου :

$$K^* = K_3 + 2, \quad a = \frac{1 + K_1}{2 + K_3}, \quad b = \frac{K_2}{2 + K_3}.$$

Η απαίτηση που έχουμε για το χρόνο αποκατάστασης ($T_s < 1/2$) μας οδηγεί στο να επιλέξουμε τις ρίζες του $s^2 + as + b$ στο αριστερό μέρος της $s = -\zeta\omega_n = -8$ ευθείας του s -επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα 101, για να επιβεβαιώσουμε ότι ο τόπος περιφέρεται στην απαιτούμενη περιοχή παρουσίας. Διαλέξαμε $a=16$ και $b=70$ για την επιβεβαίωση της περιφοράς του τόπου μετά την ευθεία $s=-8$. Επιλέγουμε ένα σημείο του τόπου των ριζών το οποίο να βρίσκεται στη περιοχή παρουσίας, και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `rlocfind`, βρίσκουμε το σχετιζόμενο κέρδος K^* , καθώς και τη σχετιζόμενη τιμή του ω_n . Για το σημείο που διαλέξαμε, βρήκαμε ότι :

$$K^* = 118.$$

Στη συνέχεια, με τα K^* , a και b μπορούμε να βρούμε τους PID συντελεστές ως ακολούθως :

$$\begin{aligned} K_3 &= K^* - 2 = 116, \\ K_1 &= a(2 + K_3) - 1 = 1187, \\ K_2 &= b(2 + K_3) = 8260. \end{aligned}$$

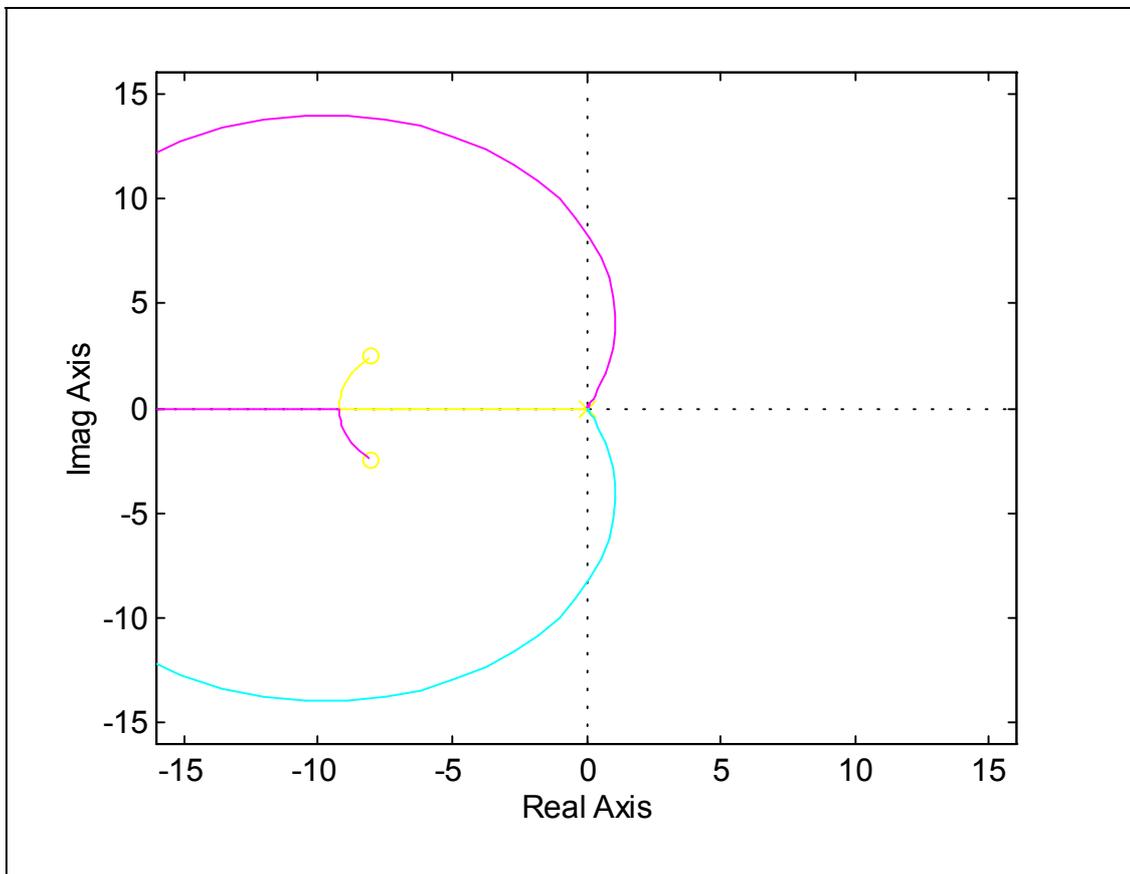
Για να εκπληρώνονται οι προδιαγραφές παρουσίας της υπερύψωσης για βηματική είσοδο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα αρχικό κέρδος K , το οποίο θα εναλλάσσεται με κάποια μέθοδο και φυσικά θα κάνουμε χρήση της συνάρτησης `step` (σχήμα 102). Η βηματική απόκριση για $K=5$, δίνει μία αποδεκτή υπερύψωση 2%. Με τη προσθήκη του κέρδους $K=5$, ο τελικός PID ελεγκτής είναι :

$$G_c(s) = K \frac{K_3 s^2 + K_1 s + K_2}{s} = 5 \frac{116s^2 + 1187s + 8260}{s} \quad (\text{εξίσωση 18}).$$

Βλέπουμε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε το προφίλτρο. Αντί για αυτό χρησιμοποιήσαμε το κέρδος του συστήματος για να πάρουμε μία ικανοποιητική μεταβατική απόκριση. Τώρα μπορούμε να θέσουμε την ερώτηση της ευρωστίας σε αλλαγές της παραμέτρου c_0 .

Η έρευνά μας για την ευρωστία του σχεδιασμού μας αποτελείται από την ανάλυση της βηματικής απόκρισης χρησιμοποιώντας τον PID ελεγκτή που δίνεται από την εξίσωση 18, για αρκετές αλλαγές της παραμέτρου c_0 , όπου $c_0 \in [0.1, 10]$. Τα αποτελέσματα δίνονται στο σχήμα 103.

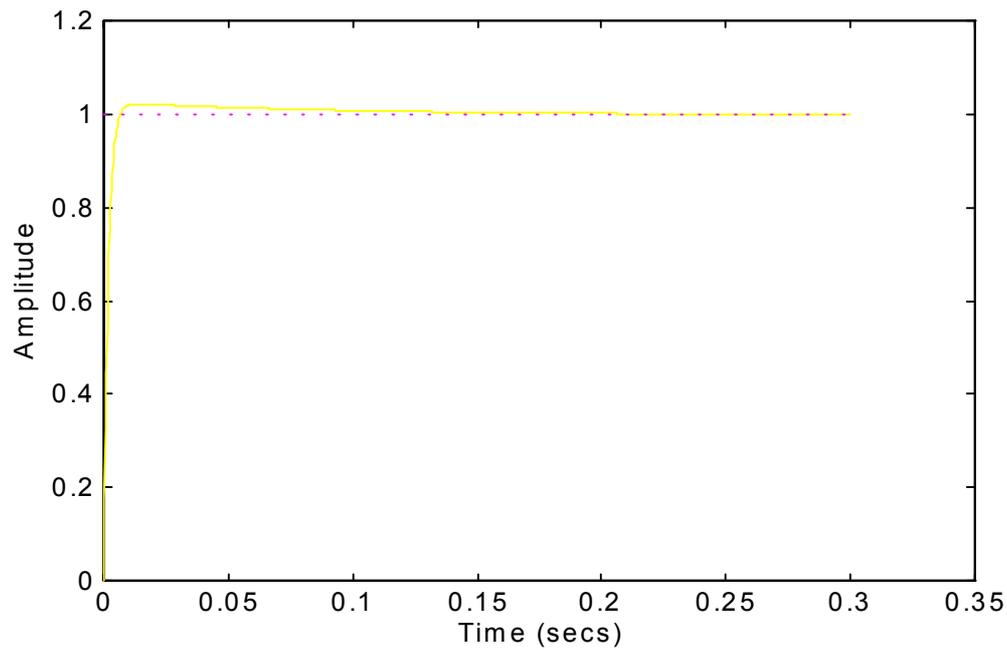
» `a=16;b=70;num=[1 a b];den=[1 0 0 0];rlocus(num,den)`
 » `rlocfind(num,den)`



Το Μαρχείο του σχήματος 103 γράφτηκε για να υπολογίζει τη βηματική απόκριση για ένα δοθέν c_0 . Βάζοντας το c_0 να αλλάζει από το επίπεδο διαταγών, το Μαρχείο γίνεται πιο ενεργό (πιο εύχρηστο).

Τα αποτελέσματα της εξομοίωσης δείχνουν ότι ο σχεδιασμός του PID είναι εύρωστος σε αλλαγές της c_0 . Οι διαφορές στη βηματική απόκριση για $c_0 \in [0.1, 10]$ διακρίνονται ελάχιστα στο διάγραμμα. Αν τα αποτελέσματα ήταν διαφορετικά, θα επαναλαμβάναμε τον σχεδιασμό έως ότου να πάρουμε μία αποδεκτή παρουσίαση.

Υπάρχουν διάφοροι μέθοδοι σχεδιασμού ελέγχου, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν απευθείας την ευρωστία στη διαδικασία σχεδιασμού, αλλά η παρουσίασή τους είναι έξω από το σκοπό αυτών των σημειώσεων. Η δυνατότητα του MATLAB να κάνει ενεργά τα Μαρχεία, μας επιτρέπει να ελέγχουμε την ευρωστία με εξομοίωση, αν και είναι εμφανές ότι αυτή δεν είναι για το σχεδιασμό η πιο επιθημητή προσέγγιση.



tempstep.m

```

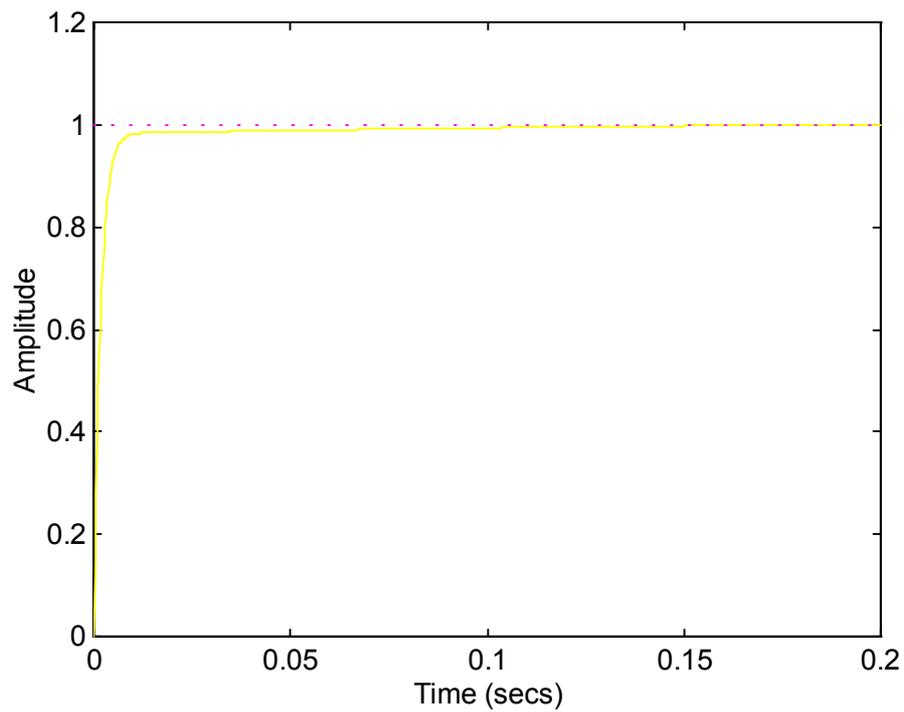
ks=118;
a=16;b=70;
k=5;
k3=ks-2,k1=a*(2+k3)-1,k2=b*(2+k3)
numgc=k*[k3 k1 k2];dengc=[1 0];
numg=[1];deng=[1 2 1];
%
nums=conv(numgc,numg);
dens=conv(dengc,deng);
%
[num,den]=cloop(nums,dens);
step(num,den)

```

Σχήμα 102

Δοκιμάστε $K=1,2$ κ.λ.π.
δείτε τι βγαίνει.

,για να



robPID.m

```
c0=10;  
numg=[1];deng=[1 2*c0 c0^2];  
numgc=5*[116 1187 8260];dengc=[1 0];  
%  
numa=conv(numg,numgc);dena=conv(deng,dengc);  
%  
[num,den]=cloop(numa,dena);  
%  
step(num,den)
```

Σχήμα 103

Τα μπλοκ διαγράμματα πολύ συχνά έχουν συναρτήσεις μεταφοράς σε παράλληλα διάταξη. Η συνάρτηση *parallel* χρησιμοποιείται σε αυτή τη περίπτωση.

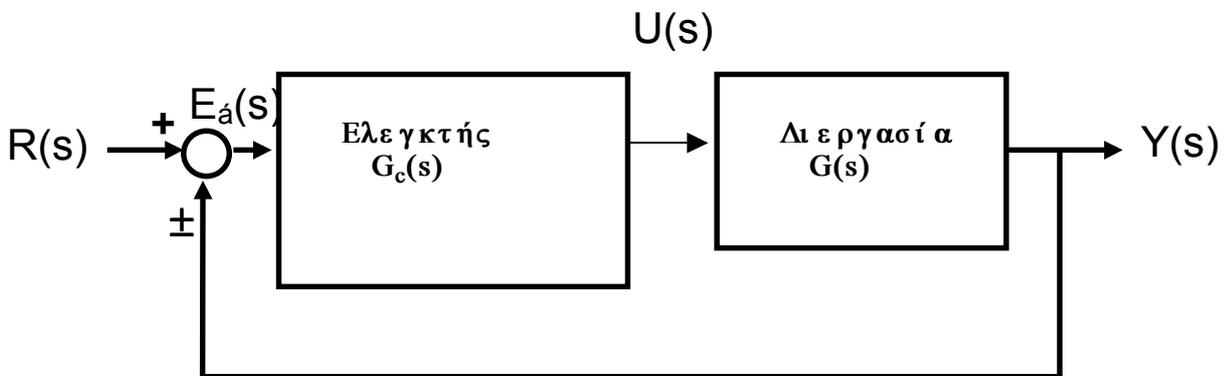
Μπορούμε επίσης να εισάγουμε ένα σήμα ανατροφοδότησης στο σύστημα ελέγχου (σχήμα 31) κλείνοντας το βρόχο με μοναδιαία ανατροφοδότηση. Το σήμα $E_a(s)$ είναι το σήμα σφάλματος, ενώ το σήμα $R(s)$ είναι η είσοδος αναφοράς. Σε αυτό το σύστημα ελέγχου ο ελεγκτής είναι μπροστά από τη διεργασία κι έτσι η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού-βρόχου είναι :

$$G_c G(s)$$

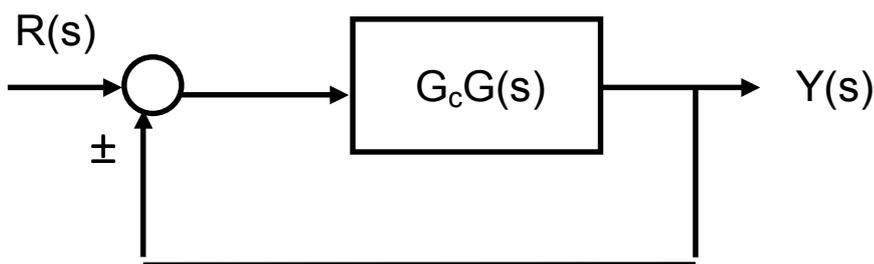
$$T(s) =$$

$$\frac{G_c G(s)}{1 \pm G_c G(s)}$$

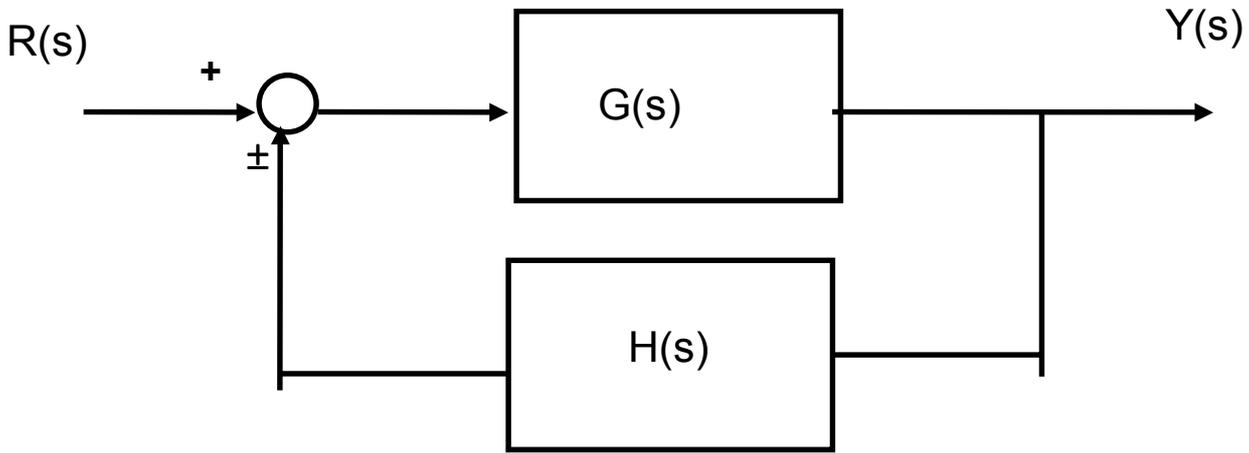
Υπάρχουν δύο συναρτήσεις ακόμα που μας βοηθούν στην απλοποίηση συναρτήσεων μεταφοράς κλειστού βρόχου. Αυτές οι συναρτήσεις είναι οι *loop* και *feedback*. Η συνάρτηση *loop* υπολογίζει τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου (σχήμα 32α και β). Η συνάρτηση *feedback* δείχνεται στο σχήμα 33α και β, με την $H(s)$ στον κλάδο ανατροφοδότησης. Και για την *loop* και για την *feedback* συνάρτηση, αν παραλείψουμε το πρόσημο, τότε υποθέτει αρνητική ανατροφοδότηση.



Σχήμα 31



Σχήμα 32α



Σχήμα 33α

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} \quad G_c G(s) = \frac{\text{num1}}{\text{den1}} \quad \begin{array}{l} +1 \text{ -θετική ανατροφοδότηση} \\ -1 \text{ -αρνητική ανατροφοδότηση} \end{array}$$

[num,den]=cloop(num1,den1,sign)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\text{num}}{\text{den}} \quad G(s) = \frac{\text{num1}}{\text{den1}} \quad \begin{array}{l} +1 \text{ -θετική ανατροφοδότηση} \\ -1 \text{ -αρνητική ανατροφοδότηση} \end{array}$$

(εξ ορισμού)

$$H(s) = \frac{\text{num2}}{\text{den2}}$$

[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2,sign)

Εκτός από τη σύνταξη των εντολών στο σχήμα 34 δίνονται και ορισμένα παραδείγματα με τις συναρτήσεις parallel,cloop και feedback.

```
>>numg=[1];deng=[500 0 0];
>>numc=[1 1];denc=[1 2];
>>[num1,den1]=series(numg,deng,numc,denc);
>>[num,den]=cloop(num1,den1,-1);
>>printsys(num,den)
num/den =
```

$$\frac{\text{num1}}{\text{den1}} = \frac{\text{numg} \cdot \text{numc}}{\text{deng} \cdot \text{denc}}$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{GcG}{1+GcG} = \frac{\text{num1}}{\text{den1}}$$

$$\frac{s + 1}{500 s^3 + 1000 s^2 + s + 1}$$

```
>>numg=[1];deng=[500 0 0];
>>numc=[1 1];denc=[1 2];
>>[num1,den1]=parallel(numg,deng,numc,denc);
>>[num,den]=cloop(num1,den1,-1);
>>printsys(num,den)
num/den=
```

$$\frac{\text{num1}}{\text{den1}} = \frac{\text{numg}}{\text{deng}} + \frac{\text{numc}}{\text{denc}}$$

$$\frac{500 s^3 + 500 s^2 + s + 2}{1000 s^3 + 1500 s^2 + s + 2}$$

```
>>numg=[1];deng=[500 0 0];
>>numh=[1 1];denh=[1 2];
>>[num,den]=feedback(numg,deng,numh,denh,-1);
>>printsys(num,den)
num/den =
```

$$\frac{Y}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

$$\frac{s + 2}{500 s^3 + 1000 s^2 + s + 1}$$

Χαρακτηριστικά των συστημάτων ελέγχου

1. Εισαγωγή

Εισάγουμε ανατροφοδότηση για τους εξής λόγους:

1. Μειώνεται η ευαισθησία του συστήματος σε διάφορες μεταβολές,
2. είναι δυνατή η ρύθμιση της μεταβατικής απόκρισης του συστήματος,
3. απορρίπτονται οι παρεμβολές, και
4. μειώνονται τα σφάλματα σταθερής κατάστασης.

Τα πλεονεκτήματα της ανατροφοδότησης (φαίνονται πιο πάνω) προέρχονται από αυτά που συνεπάγεται η αύξηση της πολυπλοκότητας του συστήματος, η μείωση του κέρδους του συστήματος κλειστού βρόχου, και η εισαγωγή πιθανής αστάθειας. Εφόσον τα πλεονεκτήματα είναι περισσότερα από τα μειονεκτήματα, τα συστήματα ελέγχου με ανατροφοδότηση βρίσκονται παντού. Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα πλεονεκτήματα της ανατροφοδότησης με δύο παραδείγματα. Σκοπός μας είναι να δείξουμε τη χρήση του MATLAB στην ανάλυση συστημάτων ελέγχου.

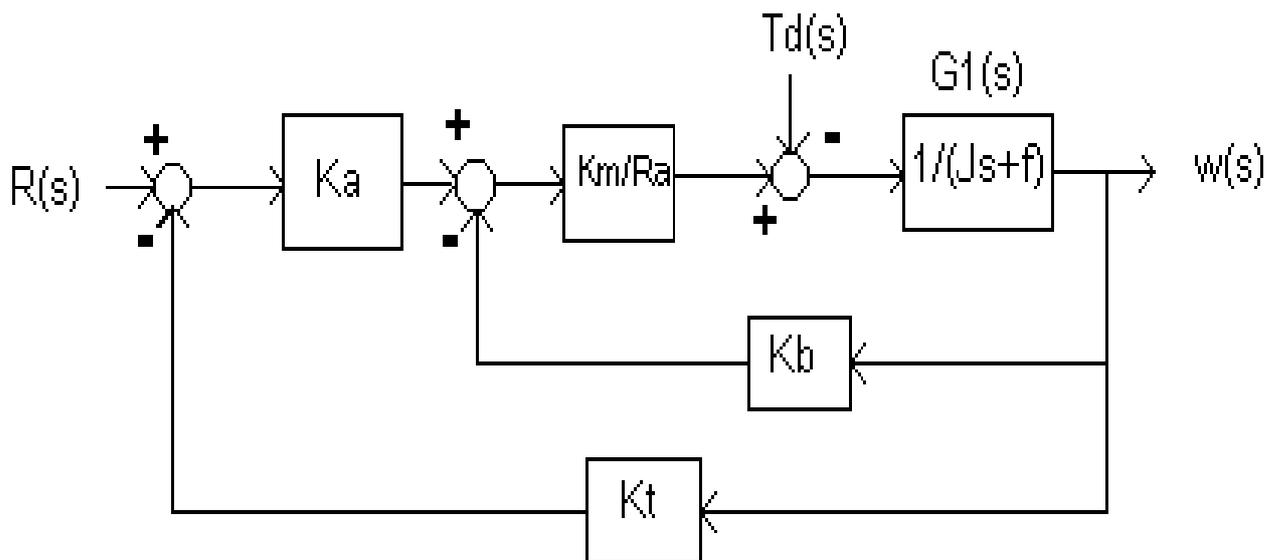
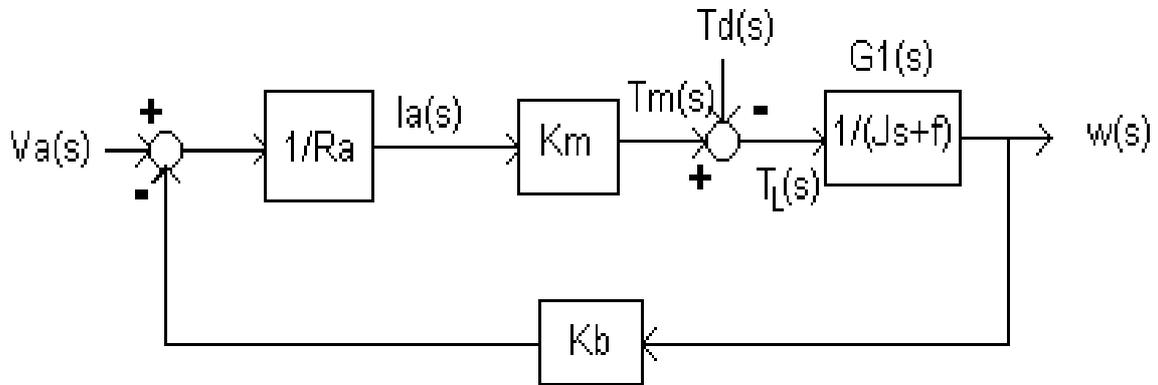
2. Σύστημα ταχύμετρου ταχύτητας

Το μπλοκ διάγραμμα ανοιχτού βρόχου του επαγωγίσιμου ελεγχόμενου dc-μοτέρ με παρεμβολή φορτίου ροπής, $T_d(s)$, φαίνεται στο σχήμα 45. Έχουμε δύο εισόδους στο σύστημά μας, τη $V_a(s)$ και τη $T_d(s)$. Βασιζόμενοι στην αρχή της υπέρθεσης, η οποία εφαρμόζεται στο LTI σύστημά μας, θεωρούμε ξεχωριστά την κάθε είσοδο. Για να δούμε τα αποτελέσματα των παρεμβολών στο σύστημα, θέτουμε $V_a(s)=0$ και θεωρούμε μόνο τη παρεμβολή $T_d(s)$. Αντίστροφα για να δούμε την απόκριση του συστήματος για μια είσοδο αναφοράς, θέτουμε $T_d(s)=0$ και θεωρούμε μόνο την είσοδο $V_a(s)$.

Το μπλοκ διάγραμμα του συστήματος ελέγχου κλειστού βρόχου του ταχύμετρου ταχύτητας βρίσκεται στο σχήμα 46. Οι τιμές όλων των παραμέτρων βρίσκονται στον πίνακα 6.

Αν το σύστημά μας παρουσιάζει καλή απόρριψη παρεμβολών, τότε περιμένουμε η $T_d(s)$ να έχει μικρή επίδραση στην έξοδο $\omega(s)$. Θεωρίστε το σύστημα ανοιχτού βρόχου. Με το MATLAB υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από το $T_d(s)$ στο $\omega(s)$ και εκτιμούμε την απόκριση εξόδου για μοναδιαία βηματική διέγερση (π.χ. $T_d(s)=1/s$). Στο σχήμα 47 βρίσκεται η χρονική απόκριση γι' αυτή την $T_d(s)$, μαζί με το αντίστοιχο Μ-αρχείο που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση του συστήματος ανοιχτού βρόχου.

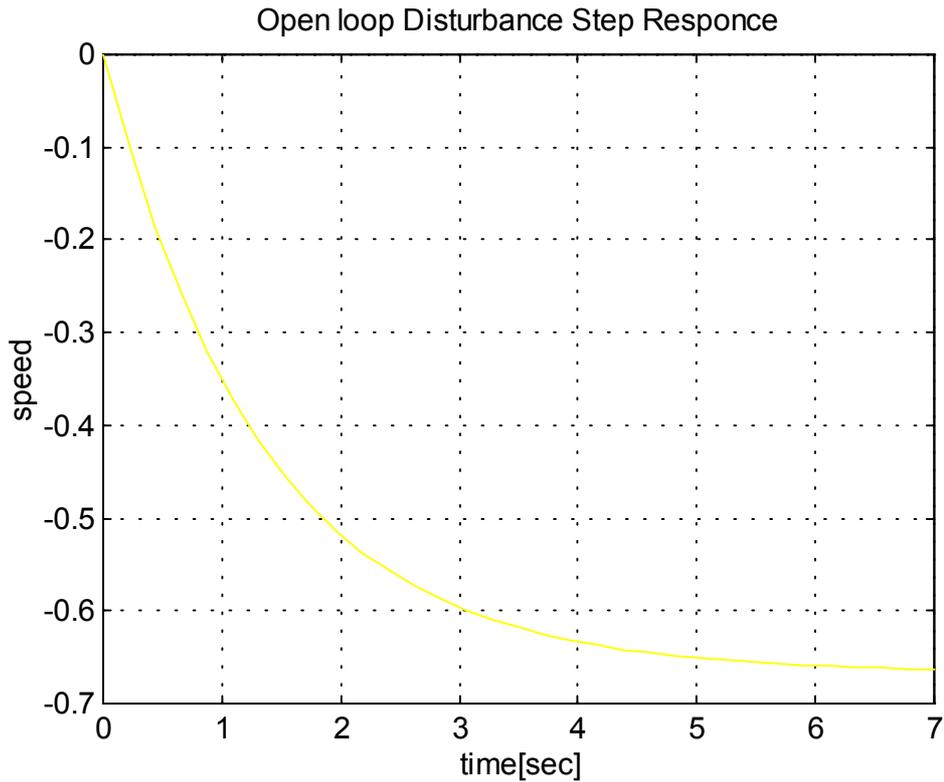
Σχήμα 45



Σχήμα 46

| Ra | Km | J | f | Kb | Ka | Kt |
|-----------|-----------|----------|------------|------------|-----------|-----------|
| 1 | 10 | 2 | 0.5 | 0.1 | 54 | 1 |

Πίνακας 6



opentach.m

```
%Speed Tachometer Example
%
Ra=1;km=10;J=2;f=0.5;kb=0.1;
num1=[1];den1=[J,f];num2=[km*kb/Ra];den2=[1];
[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2);
%
num=-num;
printsys(num,den)
%
[y0,x,t]=step(num,den);plot(t,y0)
title('Open loop Disturbance Step Responce')
xlabel('time[sec]'),ylabel('speed'),grid
%
y0(length(t))
```

Σχήμα 47

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι η εξής :

$$\omega(s) = \frac{\text{num} \quad -1}{\text{den} \quad 2s+1.5}$$

Αν και η επιθυμητή τιμή για το $\omega(t)$ είναι η μηδενική (γιατί $V_a(s)=0$), το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι τελικά η τελική τιμή του, όπου για ανοιχτό βρόχο είναι $\omega_o(t)$. Το σφάλμα σταθερής κατάστασης, σχήμα 47, είναι κατά προσέγγιση η τιμή της ταχύτητας για $t=7\text{sec}$. Μπορούμε να πάρουμε μία προσεγγιστική τιμή αυτού του σφάλματος από την τελευταία τιμή του βέκτορα y_o , δηλαδή:

$$\omega_o(\infty) \approx \omega_o(7) = -0.6632 \text{ rad/sec.}$$

Αυτό που μας βγάζει το MATLAB φαίνεται πιο κάτω:

```

num/den =
      -1
-----
 2 s + 1.5

ans =

-0.6632

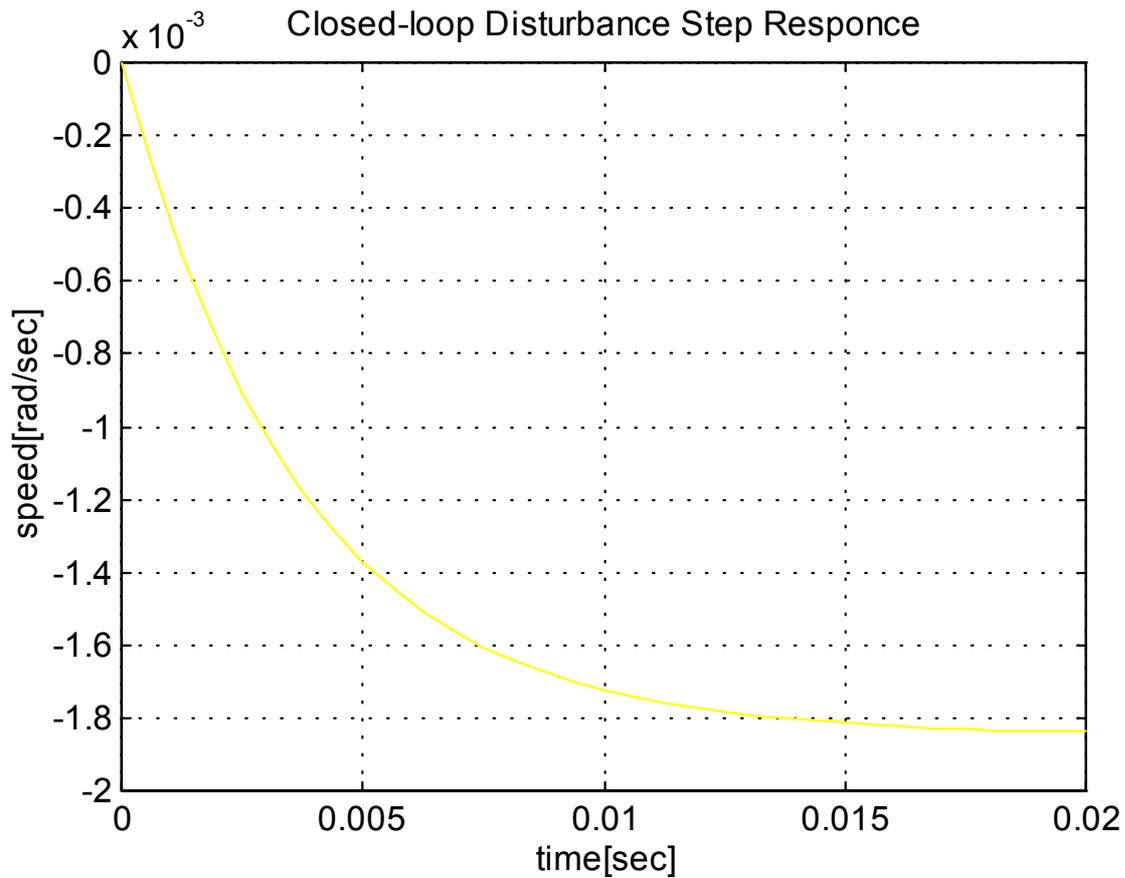
```

Με παρόμοιο τρόπο θα κάνουμε την ανάλυση του συστήματος κλειστού βρόχου. Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς από το $T_d(s)$ στο $\omega(s)$, και θα δημιουργήσουμε τη χρονική απόκριση $\omega(t)$ για είσοδο μοναδιαίας βηματικής διέγερσης. Η απόκριση εξόδου και το M-αρχείο φαίνονται στο σχήμα 48. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του κλειστού βρόχου είναι:

$$\omega(s) = \frac{\text{num} \quad -1}{\text{den} \quad 2s+541.5}$$

Όπως και προηγουμένως το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι τελικά η τελική τιμή του $\omega(t)$, όπου για κλειστό βρόχο είναι $\omega_c(t)$. Το σφάλμα σταθερής κατάστασης δείχνεται στο σχήμα 48. Μπορούμε να πάρουμε μία προσεγγιστική τιμή αυτού του σφάλματος από την τελευταία τιμή του βέκτορα y_c , δηλαδή:

$$\omega_c(\infty) \approx \omega_c(0.02) = -0.0018 \text{ rad/sec.}$$



```

%Speed Tachometer Example
%
Ra=1;km=10;J=2;f=0.5;kb=0.1;ka=54;kt=1;
num1=[1];den1=[J,f];num2=[ka*kt];den2=[1];
num3=[kb];den3=[1];num4=[km/Ra];den4=[1];
[numa,dena]=parallel(num2,den2,num3,den3);
[numb,denb]=series(numa,dena,num4,den4);
[num,den]=feedback(num1,den1,numb,denb);
%
num=-num;
printsys(num,den)
%
[yc,x,t]=step(num,den);plot(t,yc)
title('Closed-loop Disturbance Step Response')
xlabel('time[sec]'),ylabel('speed[rad/sec]'),grid
%
yc(length(t))

```

Αυτό που μας βγάζει το MATLAB φαίνεται πιο κάτω:

num/den =

-1

2 s + 541.5

ans =

-0.0018

Γενικά περιμέναμε ότι $\omega_c(\infty)/\omega_o(\infty) < 0.02$. Ο λόγος της ταχύτητας εξόδου σταθερής κατάστασης του κλειστού βρόχου προς τον ανοιχτό που οφείλεται στην είσοδο μοναδιαίας βηματικής διέγερσης, είναι σε αυτό το παράδειγμα: $\omega_c(\infty)/\omega_o(\infty) = 0.0027$.

Κάναμε λοιπόν μία αξιοσημείωτη βελτίωση στην απόρριψη παρεμβολών. Είναι προφανές ότι η προσθήκη αρνητικού βρόχου ανατροφοδότησης μειώνει την επίδραση της παρεμβαλλόμενης διέγερσης στην έξοδο. Αυτό επίσης δείχνει την ιδιότητα *απόρριψης παρεμβαλλόμενων διεγέρσεων των συστημάτων κλειστού βρόχου με ανατροφοδότηση*.

Παρουσίαση συστημάτων ελέγχου

1. Εισαγωγή

Η αρχική θεώρηση στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου είναι η ευστάθεια και η παρουσίαση. Η παρουσίαση είναι ένα θέμα για σταθερά συστήματα και παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο. Προκειμένου να σχεδιάσουμε και να αναλύσουμε συστήματα ελέγχου, πρέπει πρώτα να έχουμε αρκετές προδιαγραφές παρουσιάσεων. Αυτές οι προδιαγραφές δίνονται στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων. Οι προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου δίνονται γενικά ως χρόνος αποκατάστασης, ποσοστό υπερύψωσης, χρόνος ανύψωσης και σφάλμα σταθερής κατάστασης. Η ευστάθεια και οι προδιαγραφές στο πεδίο των συχνοτήτων θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

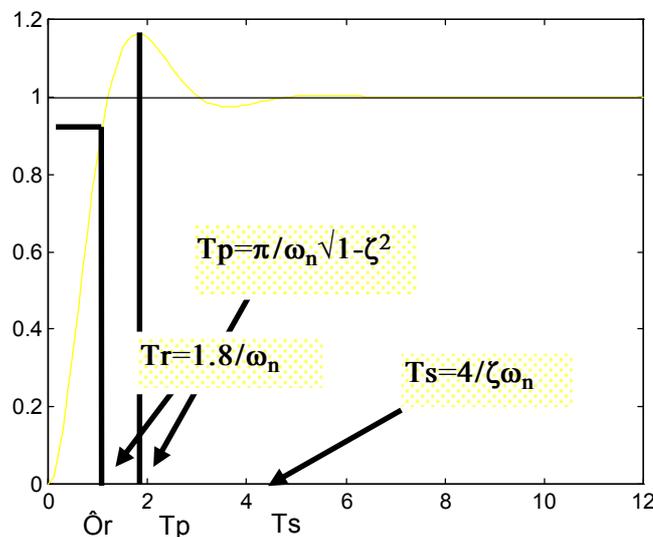
2. Προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου

Αυτές οι προδιαγραφές δίνονται γενικά με όρους από την μεταβατική απόκριση ενός συστήματος για ένα σήμα εισόδου. Μια και τα σήματα εισόδου είναι συνήθως άγνωστα, χρησιμοποιείται δοκιμαστικά το $r(t)=t^n$ ως σήμα εισόδου, του οποίου ο μετασχηματισμός Laplace είναι $R(s)=n! / s^{n+1}$.

Όταν $n=1,2$ και 3 έχουμε βηματική, ράμπας και παραβολική είσοδο αντίστοιχα. Η κρουστική συνάρτηση χρησιμοποιείται επίσης ως δοκιμαστικό σήμα εισόδου.

Οι κοινές μετρήσεις παρουσιάσεων συνήθως προσδιορίζονται με όρους της βηματικής και της κρουστικής απόκρισης. Οι πιο κοινές μετρήσεις της βηματικής απόκρισης είναι το ποσοστό υπερύψωσης (P.O.), ο χρόνος ανύψωσης (T_r), ο χρόνος κορυφής (T_p) και ο χρόνος αποκατάστασης (T_s) (σχήμα 49).

Θεωρήστε το σύστημα δευτέρου βαθμού (τάξης) (σχήμα 50). Η

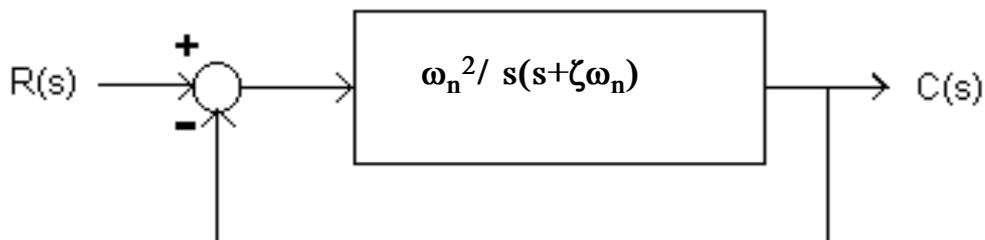


Σχήμα 49

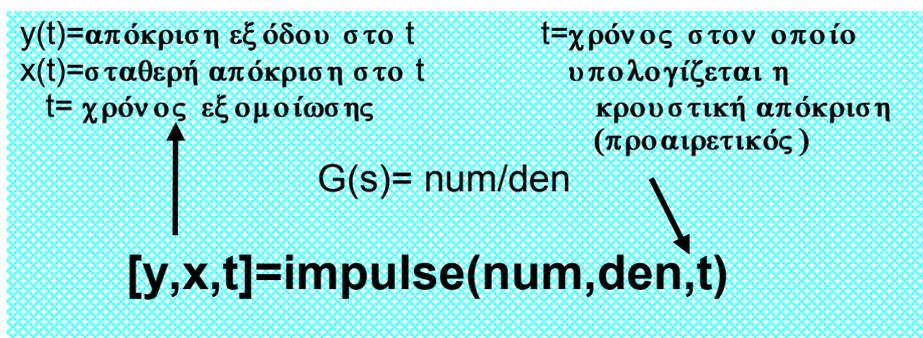
έξοδος του κλειστού βρόχου είναι η εξής :

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

Ηδη έχουμε αναφερθεί στη συνάρτηση step για την εύρεση της βηματικής απόκρισης ενός συστήματος. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε ένα άλλο σήμα που χρησιμοποιείται ως δοκιμαστική είσοδος: την κρουστική είσοδο. Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση με τη συνάρτηση impulse (σχήμα 51).

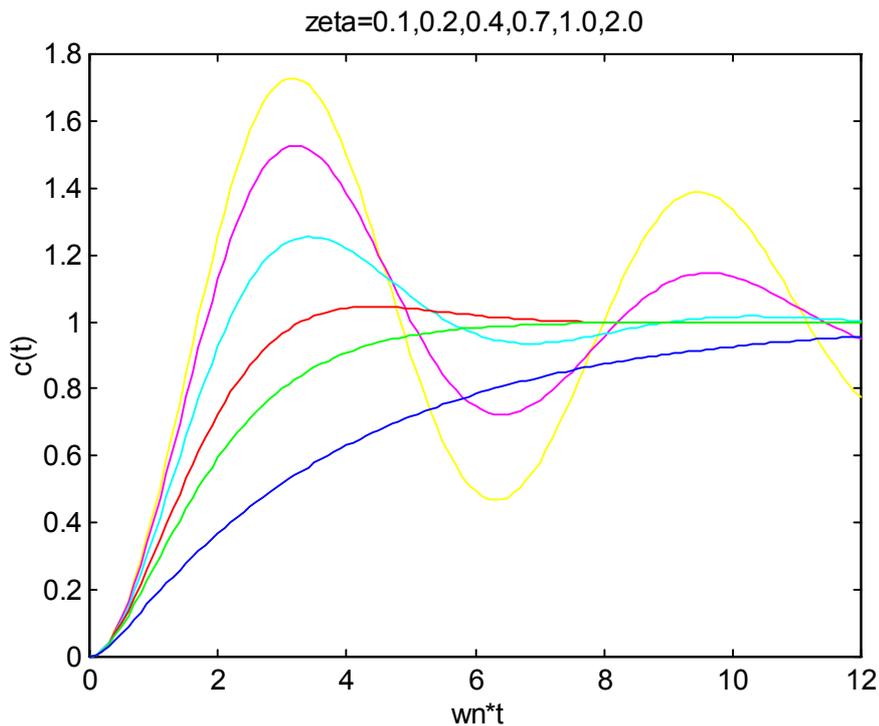


Σχήμα 50



Σχήμα 51

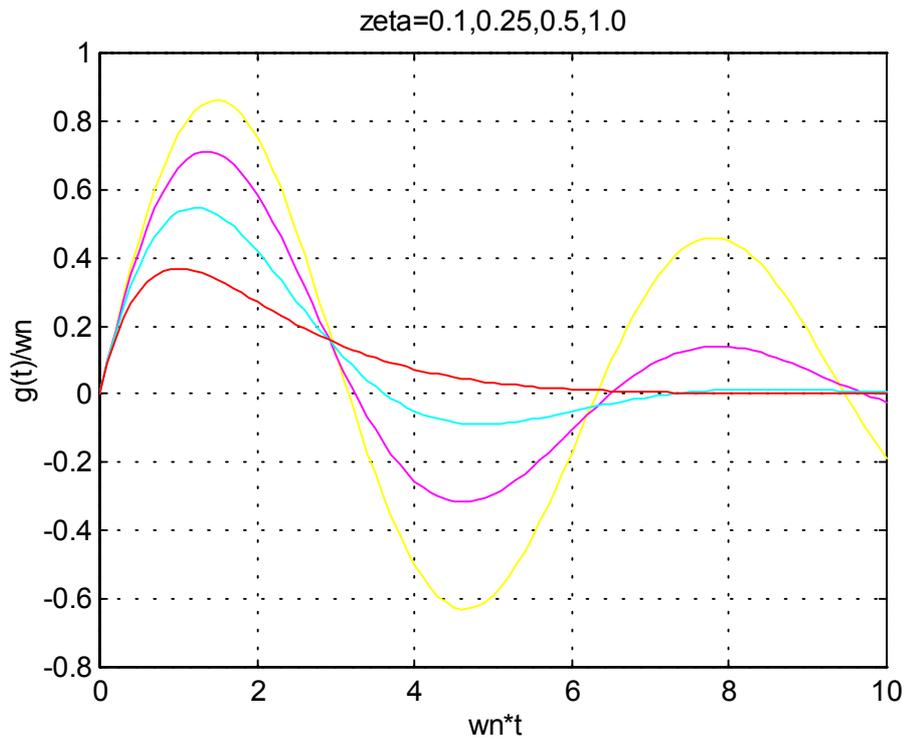
Παράδειγμα με τη συνάρτηση step φαίνεται στο σχήμα 52, ενώ στο σχήμα 53 υπάρχει αντίστοιχο παράδειγμα με τη συνάρτηση impulse. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε την απόκριση ενός συστήματος δεύτερης τάξης. Στα M-αρχεία έχουμε θέσει $\omega_n=1$, το οποίο ισοδυναμεί με υπολογισμό της βηματικής απόκρισης προς το $\omega_n t$. Αυτό μας δίνει ένα πιο γενικό διάγραμμα, που ισχύει για κάθε $\omega_n > 0$.



stepresp.m

```
%Compute step response for a second-order system
%
t=[0:0.1:12];num=[1];
zeta1=0.1;den1=[1 2*zeta1 1];
zeta2=0.2;den2=[1 2*zeta2 1];
zeta3=0.4;den3=[1 2*zeta3 1];
zeta4=0.7;den4=[1 2*zeta4 1];
zeta5=1.0;den5=[1 2*zeta5 1];
zeta6=2.0;den6=[1 2*zeta6 1];
%
[y1,x,t]=step(num,den1,t);[y2,x,t]=step(num,den2,t);
[y3,x,t]=step(num,den3,t);[y4,x,t]=step(num,den4,t);
[y5,x,t]=step(num,den5,t);[y6,x,t]=step(num,den6,t);
%
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4,t,y5,t,y6)
xlabel('wn*t'),ylabel('c(t)')
title('zeta=0.1,0.2,0.4,0.7,1.0,2.0')
```

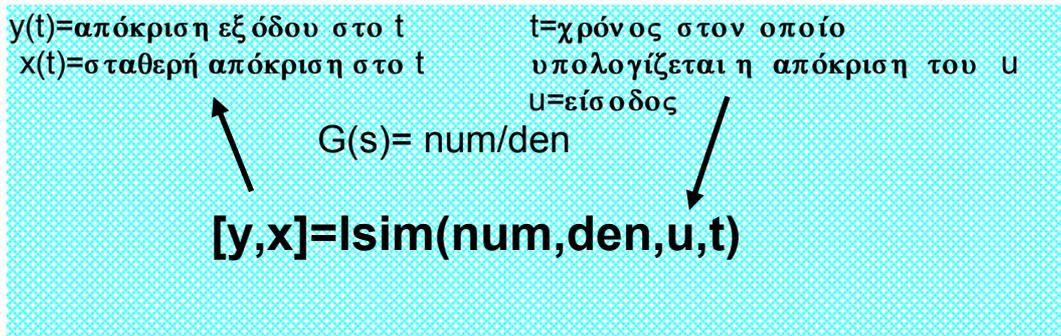
Σχήμα 52



impresp.m

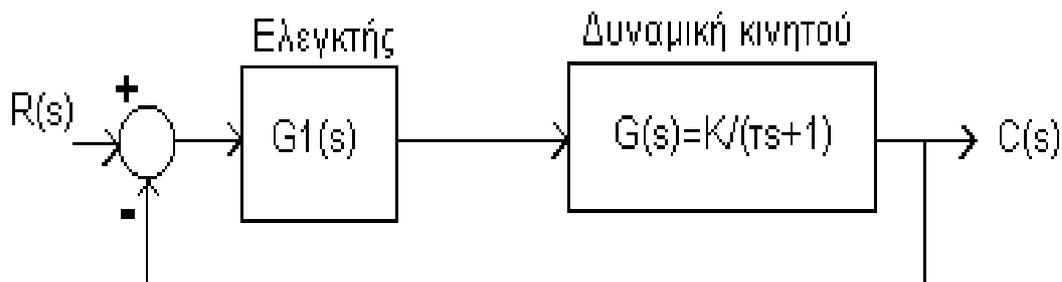
```
%Compute impulse response for a second-order system
%
t=[0:0.1:10];num=[1];
zeta1=0.1;den1=[1 2*zeta1 1];
zeta2=0.25;den2=[1 2*zeta2 1];
zeta3=0.5;den3=[1 2*zeta3 1];
zeta4=1.0;den4=[1 2*zeta4 1];
%
[y1,x,t]=impulse(num,den1,t);
[y2,x,t]=impulse(num,den2,t);
[y3,x,t]=impulse(num,den3,t);
[y4,x,t]=impulse(num,den4,t);
%
plot(t,y1,t,y2,t,y3,t,y4)
xlabel('wn*t'),ylabel('g(t)/wn')
title('zeta=0.1,0.25,0.5,1.0'),grid
```

Πολλές φορές είναι αναγκαίο να εξομοιώσουμε την απόκριση του συστήματος για μία αυθαίρετη αλλά γνωστή είσοδο. Σε αυτές τις περιπτώσεις, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση lsim (linear simulation) (σχήμα 54). Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα χρησιμοποιώντας αυτή τη συνάρτηση (σχήμα 56).

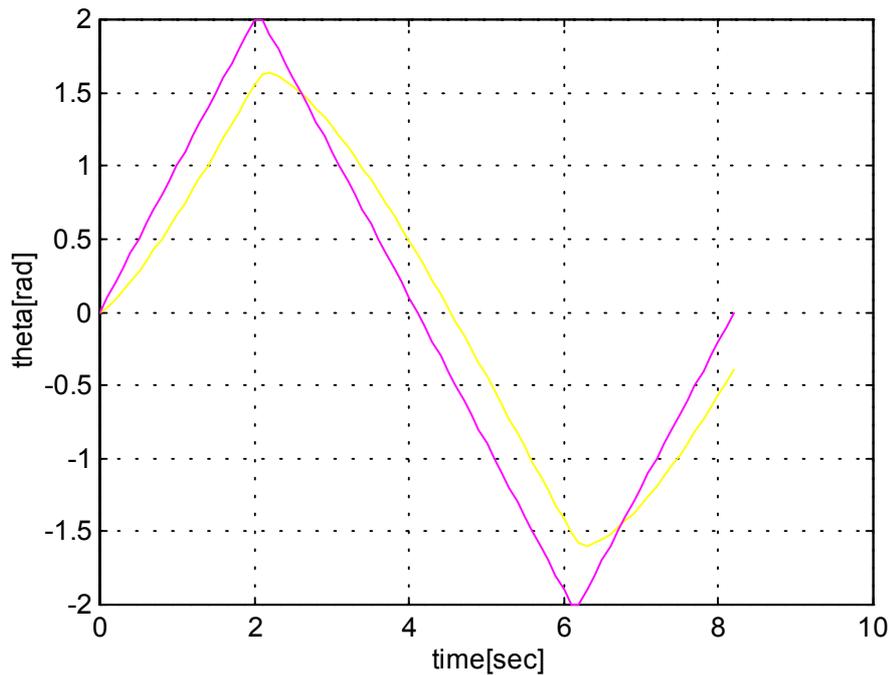


Σχήμα 54

Το παράδειγμα που δίνεται αναφέρεται στην ελεγχόμενη καθοδήγηση κινούμενου ρομπότ. Στο σχήμα 55 βρίσκεται το μπλοκ διάγραμμα αυτού του συστήματος.



Σχήμα 55



mobrobot.m

```
%Compute the response of the Mobile Robot Control
%System to a triangular wave input
%
numg=[10 20];deng=[1 10 0];
[num,den]=cloop(numg,deng);
t=[0:0.1:8.2]';
v1=[0:0.1:2]';v2=[2:-0.1:-2]';v3=[-2:0.1:0]';
u=[v1;v2;v3]';
[y,x]=lsim(num,den,u,t);
plot(t,y,t,u),
xlabel('time[sec]'),ylabel('theta[rad]'),grid
```

Σχήμα 56

Υποθέτουμε ότι ο ελεγκτής καθοδήγησης $G1(s)$ είναι : $G1(s)=K_1+K_2/s$. Όταν η είσοδος είναι ράμπα, το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι : $e_{ss}=A/K_v$ (εξίσωση 1), όπου $K_v=K_2K$.

Η επίδραση της σταθεράς του ελεγκτή, K_2 , στο σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι προφανής από την εξίσωση 1.

Οποτεδήποτε το K_2 είναι μεγάλο, το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι μικρό και αντίστροφα.

Επομένως μπορούμε να πάρουμε την απόκριση ενός συστήματος κλειστού βρόχου για είσοδο ράμπας χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `lsim`. Τα κέρδη K_1 , K_2 του ελεγκτή καθώς και το κέρδος K του συστήματος, μπορούν να εκφραστούν συμβολικά στο *M*-αρχείο, έτσι ώστε διάφορες τιμές να μπορούν να επιλεγούν και να εξομοιωθούν. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε στο σχήμα 56 είναι για $K_1=K=1$, $K_2=2$ και $\tau=1/10$.

3. Απλοποιήσεις γραμμικών συστημάτων

Στην πράξη, μπορεί να είναι αναγκαίο να προσεγγίσουμε μία συνάρτηση μεταφοράς μεγάλης τάξης με μία άλλη μικρότερης τάξης. Για παράδειγμα, μπορεί να μην είναι πρακτικό να βάλουμε έναν ελεγκτή μεγάλης τάξης σε ένα σύστημα ελέγχου. Ωστόσο μπορεί να βρεθεί ένας προσεγγιστικός ελεγκτής μικρότερης τάξης ο οποίος να πλησιάζει αρκετά καλά την απόκριση εισόδου-εξόδου του αντίστοιχου μεγαλύτερης τάξης. Στο σχήμα 57 βρίσκεται ένα παράδειγμα προσέγγισης μίας συνάρτησης μεταφοράς. Με το *MATLAB* μπορούμε επίσης να συγκρίνουμε το προσεγγιστικό μοντέλο με το πραγματικό (σχήμα 57).

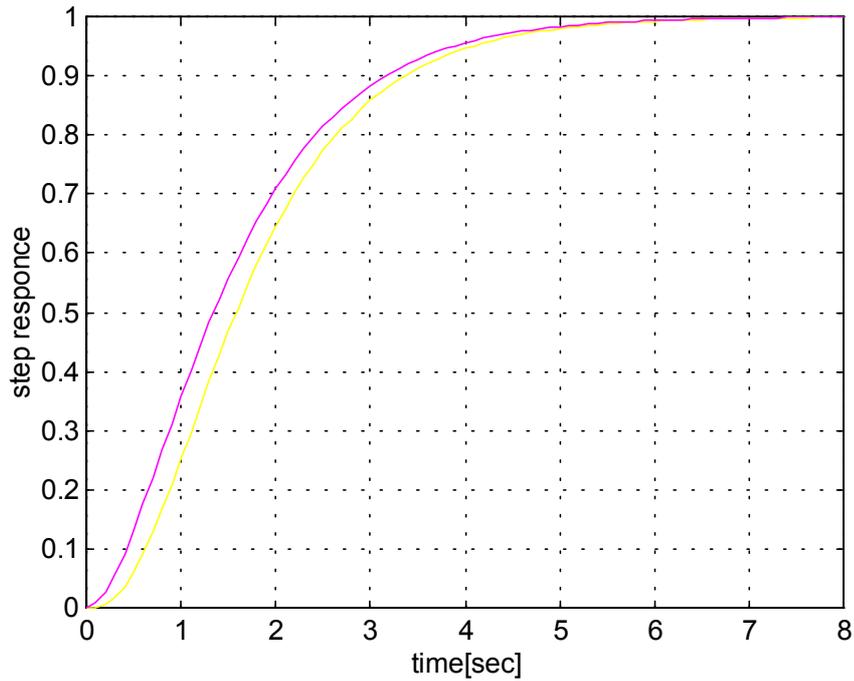
Θεωρήσαμε το εξής σύστημα τρίτου βαθμού:

$$H(s) = \frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

Μία προσέγγιση δευτέρου βαθμού είναι η εξής :

$$L(s) = \frac{1.60}{s^2+2.584s+1.60}$$

Μία σύγκριση των αντίστοιχων βηματικών τους αποκρίσεων δίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 57. Οπου η κάτω γραμμή αντιστοιχεί στο σύστημα τρίτου βαθμού.



stepcomp.m

```
%Compare step response for second-order
approximation
%
num1=[6];den1=[1 6 11 6];
num2=[1.6];den2=[1 2.584 1.6];
t=[0:0.1:8];
[y1,x,t]=step(num1,den1,t);
[y2,x,t]=step(num2,den2,t);
plot(t,y1,t,y2),grid
xlabel('time[sec]'),ylabel('step response')
```

Σχήμα 57

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ

Η ευστάθεια ενός συστήματος ελέγχου κλειστού βρόχου είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα. Μιλώντας γενικά ,ένα ασταθές σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου έχει πολύ μικρή πρακτική αξία. Για γραμμικά συστήματα, μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα σύστημα με ανατροφοδότηση να είναι σταθερό είναι : όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Αλλιώς, οι πόλοι πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο ώστε το σύστημα να είναι σταθερό. Η μέθοδος Routh-Hurwitz για τη σταθερότητα παρέχει ένα δομημένο μηχανισμό για να προσδιορίζει τον αριθμό των ασταθών πόλων της χαρακτηριστικής εξίσωσης του κλειστού βρόχου. Με αυτόν τον τρόπο μας δίνεται λοιπόν η δυνατότητα να έχουμε μία αρνητική ή καταφατική απάντηση για τη σταθερότητα, χωρίς να χρειάζεται ο υπολογισμός των πόλων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε τη μέθοδο Routh-Hurwitz ,επίσης θα δούμε πώς το MATLAB μπορεί να μας βοηθήσει στην ανάλυση της σταθερότητας παρέχοντας μία εύκολη κι ακριβής μέθοδο για τον υπολογισμό των πόλων της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Στην περίπτωση που η χαρακτηριστική εξίσωση είναι σύναρτηση μιας και μόνης παραμέτρου, είναι δυνατό να γίνει ένα διάγραμμα που να δείχνει την *κίνηση* των πόλων καθώς μεταβάλλεται αυτή η παράμετρος. Στο τέλος κλείνουμε με ένα παράδειγμα.

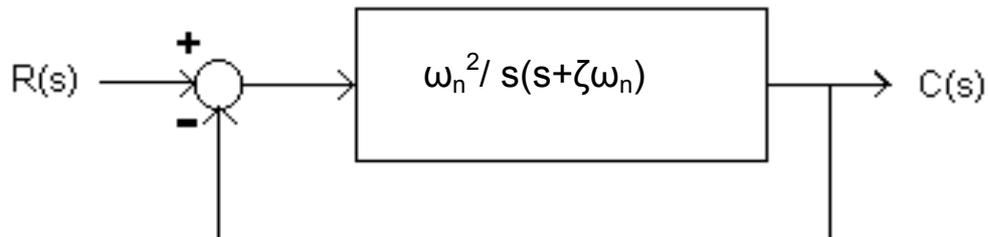
Επίσης κάνουμε χρήση της συνάρτησης **for** ,η οποία χρησιμοποιείται για να επαναλάβει έναν αριθμό δηλώσεων συγκεκριμένο αριθμό φορών.

1. Μέθοδος Routh-Hurwitz

Έχοντας μία χαρακτηριστική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, χρησιμοποιούμε Routh-Hurwitz για να προσδιορίσουμε τον αριθμό των ριζών στο δεξί ημιεπίπεδο. Για παράδειγμα θεωρήστε τη χαρακτηριστική εξίσωση: $q(s)=s^3+s^2+2s+24=0$,η οποία σχετίζεται με το σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου που βρίσκεται στο σχήμα 58. Στο σχήμα 59 βρίσκεται ο αντίστοιχος πίνακας Routh-Hurwitz. Η αλλαγή δύο προσήμων στη πρώτη στήλη δείχνει ότι υπάρχουν δύο ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στο δεξί ημιεπίπεδο. Έτσι το σύστημά μας είναι ασταθές. Με το MATLAB επαληθεύουμε τη μέθοδο Routh-Hurwitz υπολογίζοντας απευθείας τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης (σχήμα 60), χρησιμοποιώντας τη

συνάρτηση **roots**. Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση **roots** υπολογίζει τις ρίζες του πολυωνύμου.

Σχήμα 58



| | | |
|-------|-----|----|
| s^3 | 1 | 2 |
| s^2 | 1 | 24 |
| s^1 | -22 | 0 |
| s^0 | 24 | 0 |

Σχήμα 59

```

» numg=[1];deng=[1 1 2 23];
» [num,den]=cloop(numg,deng);
» roots(den)

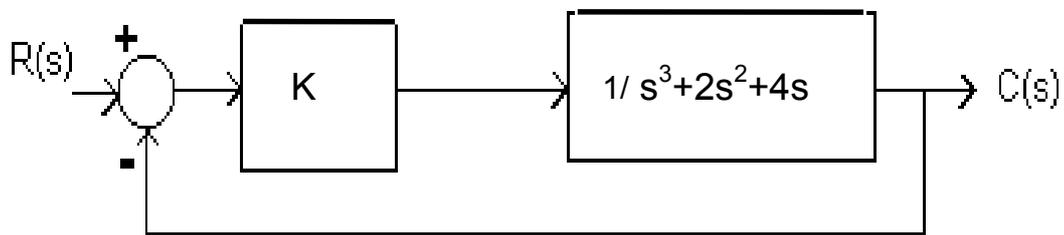
ans =

-3.0000
 1.0000 + 2.6458i
 1.0000 - 2.6458i
    
```

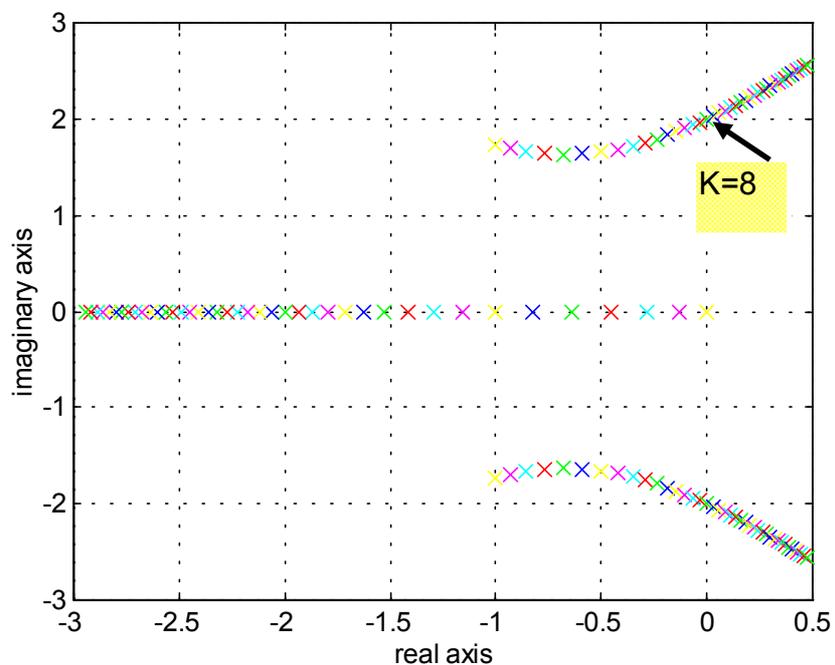
Ασταθείς ρίζες

Σχήμα 60

Οποτεδήποτε η χαρακτηριστική εξίσωση είναι συνάρτηση μιας και μοναδικής παραμέτρου, η μέθοδος Routh-Hurwitz χρησιμεύει για να προσδιορίσει το σύνολο των τιμών που μπορεί να πάρει η παράμετρος ενώ διατηρείται η σταθερότητα. Θεωρήστε το σύστημα ανατροφοδότησης κλειστού βρόχου στο σχήμα 61. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $q(s)=s^3+2s^2+4s+K=0$. Με τη προσέγγιση Routh-Hurwitz βρίσκουμε ότι πρέπει $0 \leq K \leq 8$ για να έχουμε σταθερότητα. Επαληθεύουμε γραφικά αυτό το αποτέλεσμα με τη βοήθεια του MATLAB (σχήμα 62α).



Σχήμα 61



Σχήμα 62α

Το πιο πάνω διάγραμμα παράγεται από το M-αρχείο routh.m (σχήμα 62β) . Οπως φαίνεται φτιάχνουμε έναν βέκτορα με τιμές του K για τις οποίες επιθυμούμε να υπολογίσουμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

routh.m

```
%This script computes the roots of the characteristic
%equation q(s)=s^3+2s^2+4s+K for 0<K<20
%
K=[0:0.5:20];
for i=1:length(K)
q=[1 2 4 K(i)];
p1(:,i)=roots(q);
end
plot(real(p1),imag(p1),'x'),grid
xlabel('real axis'),ylabel('imaginary axis')
```

Σχήμα 62β

Με τη συνάρτηση **roots** ,όπως βλέπουμε, υπολογίζουμε και τυπώνουμε στο διάγραμμα τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι καθώς αυξάνει το K , οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης κινούνται προς το δεξί ημιεπίπεδο καθώς το κέρδος τείνει να γίνει $K=8$, και φυσικά βρίσκονται μέσα σε αυτό όταν $K>8$.

Διευκρινιστικά αναφέρουμε ότι με τη δήλωση **p(:,i)=roots(q)** εννοούμε ότι ο βέκτορας p περιέχει όλες τις ρίζες του q για κάθε στοιχείο του βέκτορα K .

Αυτή είναι μία γραφική μέθοδος επαλήθευσης της μεθόδου Routh-Hurwitz. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τη μέθοδο *τόπου ριζών* για να πάρουμε το διάγραμμα της θέσης των ριζών σαν συνάρτηση μίας παραμέτρου.

Η χρησιμοποίηση της συνάρτησης **for** ,η οποία συνδέεται με τη δήλωση **end** δημιουργεί έναν επαναλαμβανόμενο βρόχο υπολογισμών. Για παράδειγμα:

```
for i=1:10
    a(i)=20;
    b=a(i)+2*i;
end
```

Αυτός ο βρόχος επαναλαμβάνεται 10 φορές. Κατά τη διάρκεια της i -ης επανάληψης, όπου $1 \leq i \leq 10$, το i -οστό στοιχείο του βέκτορα a τίθεται ίσο με 20 και το κλιμακωτό b υπολογίζεται ξανά.

Η μέθοδος Routh-Hurwitz μας επιτρέπει να κάνουμε ορισμένες δηλώσεις λόγω της *απόλυτης σταθερότητας* των γραμμικών

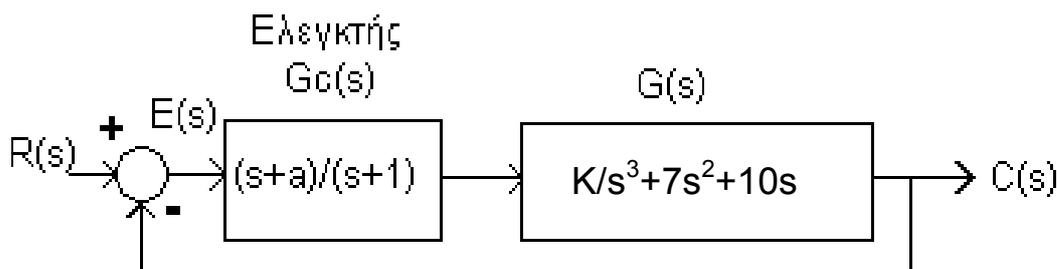
συστημάτων. Αυτή η μέθοδος δεν αναφέρεται στη *σχετική σταθερότητα*, η οποία σχετίζεται άμεσα με τη θέση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Η Routh-Hurwitz μας δίνει τον αριθμό των πόλων που βρίσκονται στο δεξί ημιεπίπεδο, αλλά όχι και την ακριβή θέση των πόλων. Με το MATLAB όμως μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τους πόλους, επιτρέποντάς μας με αυτό το τρόπο να αναφερθούμε στη *σχετική σταθερότητα* του συστήματος.

2. Παράδειγμα: Μεταβλητός έλεγχος μεγάλου οχήματος

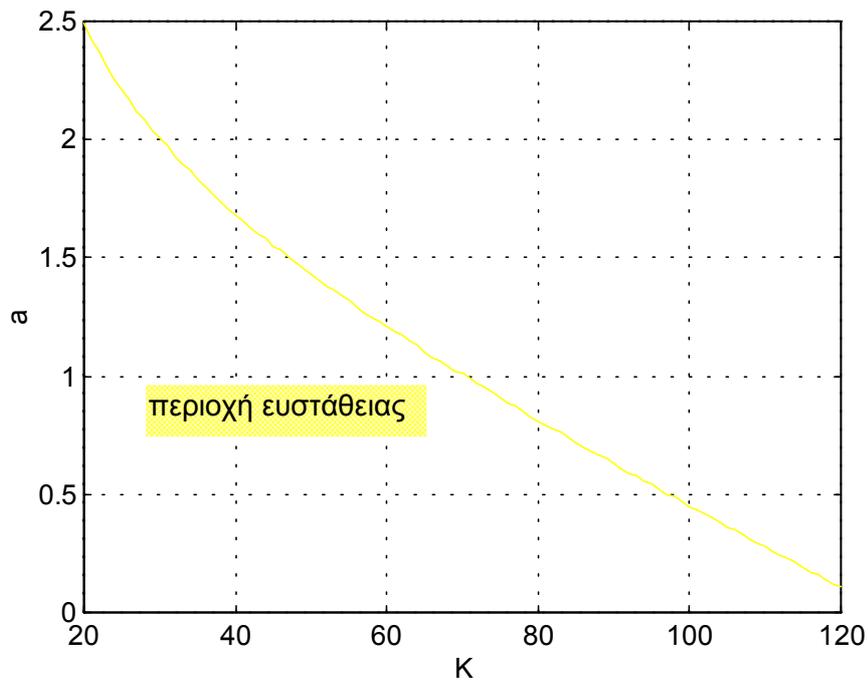
Το μπλοκ διάγραμμα αυτού του συστήματος ελέγχου φαίνεται στο σχήμα 63. Σκοπός μας είναι να βρούμε το a και το K έτσι ώστε το σύστημά μας να είναι σταθερό και το σφάλμα σταθερής κατάστασης για είσοδο ράμπας να είναι μικρότερο ή ίσο με 24%. Η μέθοδος Routh-Hurwitz μας βοηθά στην εύρεση των κατάλληλων τιμών για τα a και K . Η χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου είναι: $q(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K+10)s + aK = 0$.

Με τον πίνακα Routh-Hurwitz βρίσκουμε ότι για ευστάθεια απαιτείται: $K < 126$ και $aK > 0$.

Για θετικό K μπορούμε να περιορίσουμε το ψάξιμο για $0 < K < 126$ και $a > 0$. Χρησιμοποιώντας το MATLAB βρίσκουμε μία παραμετρική περιοχή του a προς το K μέσα στην οποία εξασφαλίζεται ευστάθεια. Μετά παίρνουμε ένα ζεύγος (a, K) που ν' ανήκει στην περιοχή ευστάθειας και να εκπληρεί τις προδιαγραφές του σφάλματος σταθερής κατάστασης. Ολη αυτή η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 64, όπου υπάρχουν επιλεγμένες τιμές για τα a και K , και υπολογίζονται οι ρίζες της χαρακτηριστικής για συγκεκριμένες τιμές τους. Για κάθε τιμή του K , βρίσκουμε τη πρώτη τιμή του a η οποία δίνει το λιγότερο μία ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο δεξί ημιεπίπεδο. Η εργασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου όλες οι τιμές των a και K εξαντληθούν. Στη συνέχεια, το διάγραμμα του ζεύγους (a, K) προσδιορίζει το διαχωρισμό μεταξύ των περιοχών ευστάθειας και αστάθειας.



Σχήμα 63



trstabil.m

```
%The stability region for the two track vehicle
%control problem
%
a=[0.1:0.01:3.0];K=[20:1:120];
x=0*K;y=0*K;
n=length(K);m=length(a);
for i=1:n
    for j=1:m
        q=[1 8 17 K(i)+10 K(i)*a(j)];
        pp=roots(q);
        if max(real(pp))>0 ,x(i)=K(i); y(i)=a(j);break;end
    end
end
plot(x,y),grid,xlabel('K'),ylabel('a')
```

Σχήμα 64

Οι δηλώσεις $x=0*K$ και $y=0*K$ αρχικοποιούν τους βέκτορες x και y (μηδενικοί βέκτορες- κατάλληλου μήκους(όσου και του K)).

Το $y(i)=a(j)$ προσδιορίζει την πρώτη τιμή του a για αστάθεια (για μία δοθείσα τιμή τιμή του K).

Το q περιέχει τους συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Αν υποθέσουμε ότι $r(t)=At$, $t>0$, τότε το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5)+K(s+a)} \frac{A}{s^2} = \frac{10A}{aK},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κάτωθι τύπο:

$$E(s) = \frac{1}{1+GcG(s)} \quad R(s) = \frac{s(s+1)(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+2)(s+5)+K(s+a)} R(s).$$

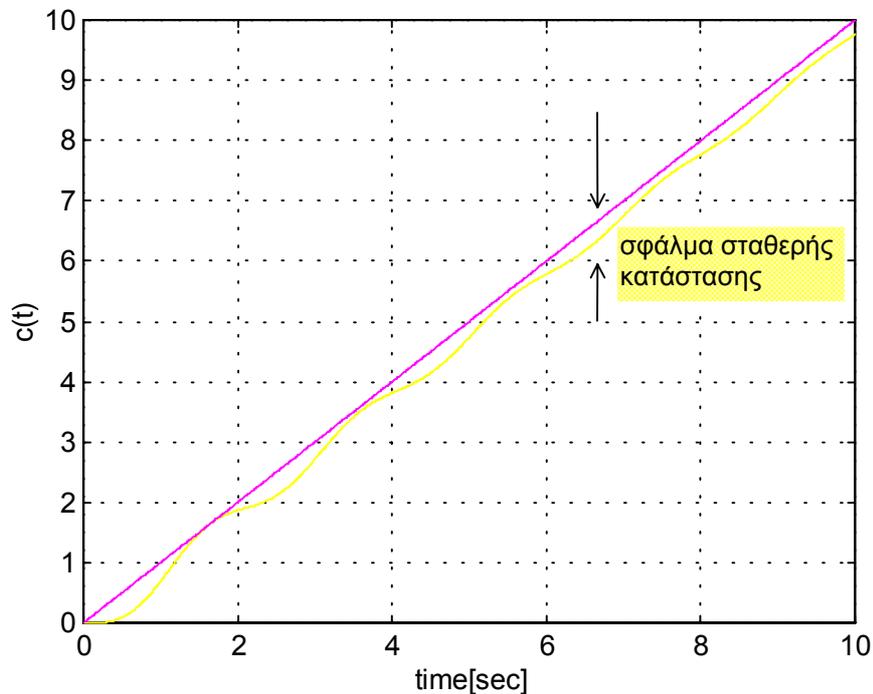
Εφόσον το σφάλμα σταθερής κατάστασης δίνεται ότι είναι $e_{ss} < 0.24A$, βρίσκουμε ότι η προδιαγραφή αυτή ικανοποιείται όταν $(10A/aK) < 0.24A$ ή $aK > 41.67$ (εξίσωση 2). Οποιαδήποτε τιμή των a και K που βρίσκεται μέσα στη περιοχή ευστάθειας και ικανοποιεί την εξίσωση 2, θα οδηγεί σε ικανοποιητικό σχεδιασμό. Για παράδειγμα, αν $K=70$ και $a=0.6$ θα ικανοποιεί όλες τις σχεδιαστικές απαιτήσεις. Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου (για $K=70$ και $a=0.6$) είναι:

$$T(s) = \frac{70s+42}{s^4+8s^3+17s^2+80s+42}.$$

Οι πόλοι που αντιστοιχούν στον κλειστό βρόχο είναι οι:

$$\begin{aligned} s &= -7.0767, \\ s &= -0.5781, \\ s &= -0.1726+3.1995i, \text{ και} \\ s &= -0.1726-3.1995i. \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη απόκριση για μοναδιαία είσοδο ράμπας φαίνεται στο σχήμα 65. Το σφάλμα σταθερής κατάστασης είναι μικρότερο από 0.25 ,όπως ήταν επιθυμητό.



aKramp.m

```
%This script computes the ramp response
%for the two-track vehicle turning control
%problem with a=0.6 and K=70
%
t=[0:0.01:10];u=t;
numgc=[1 0.6];dengc=[1 1];
numg=[70];deng=[1 7 10 0];
[numa,dena]=series(numgc,dengc,numg,deng);
[num,den]=cloop(numa,dena);
[y,x]=lsim(num,den,u,t);
plot(t,y,t,u),grid
xlabel('time[sec]'),ylabel('c(t)')
```

Σχήμα 65

ΜΕΘΟΛΟΣ ΤΟΠΟΥ ΡΙΖΩΝ

1. Εισαγωγή

Η σχετική ευστάθεια ενός συστήματος ελέγχου σχετίζεται με τη θέση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης κλειστού βρόχου. Η μεταβατική απόκριση (π.χ., χρόνος αποκατάστασης, υπερύψωση, κλπ.) ενός γραμμικού συστήματος ελέγχου σχετίζεται επίσης με τη θέση των πόλων και των μηδενικών της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου. Η σχετική ευστάθεια και η παρουσίαση των συστημάτων κλειστού βρόχου μπορεί μερικές φορές να ρυθμιστεί αλλάζοντας μία παράμετρο, όπως το κέρδος. Η μέθοδος τόπου ριζών παρέχει γραφική αναπαράσταση του τόπου των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης καθώς μεταβάλλεται κάποια παράμετρος. Η γραφική αναπαράσταση καλείται *διάγραμμα τόπου ριζών*.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το MATLAB για να πετύχουμε ένα ακριβές διάγραμμα τόπου ριζών. Ωστόσο, μην επιχειρήσετε να βασιστείτε αποκλειστικά στο MATLAB για να πετύχετε διαγράμματα τόπου ριζών ενώ θεωρείτε αμελητέα τα βήματα που κάνετε με χαρτί και μολύβι προκειμένου να πάρετε έναν προσεγγιστικό τόπο. Οι θεμελιώδεις έννοιες που βρίσκονται πίσω από τη μέθοδο τόπου ριζών κρύβονται στα βήματα που γίνονται με το χέρι και είναι βασικό να καταλάβετε πλήρως την εφαρμογή τους.

Αυτό το κεφάλαιο αρχίζει με μία συζήτηση για το πώς παίρνουμε διαγράμματα τόπου ριζών με το MATLAB. Στη συνέχεια ακολουθεί συζήτηση για τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στη μερική ανάπτυξη κλασμάτων, υπερσχύοντων πόλων, και την απόκριση συστήματος κλειστού βρόχου.

Οι συνάρτησεις που καλύπτονται από αυτό το κεφάλαιο είναι οι `rlocus`, `rlocfind`, και `residue`. Οι συναρτήσεις `rlocus` και `rlocfind` χρησιμοποιούνται για να πάρουμε διαγράμματα τόπου ριζών, ενώ η συνάρτηση `residue` χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη των ρητών συναρτήσεων σε μερικά κλάσματα.

2. Διαγράμματα τόπου ριζών

Θεωρήστε το σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου που βρίσκεται στο σχήμα 66. Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι η:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+3)+K(s+1)}$$

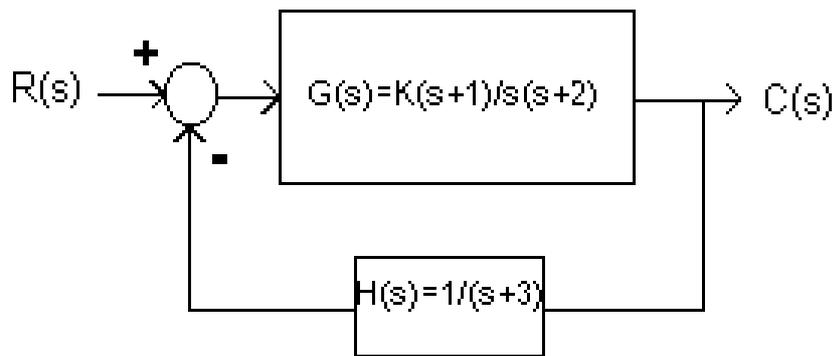
Η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$1 + K \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = 0 .$$

Η γενική μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης που είναι αναγκαία για την εφαρμογή της συνάρτησης rlocus είναι η:

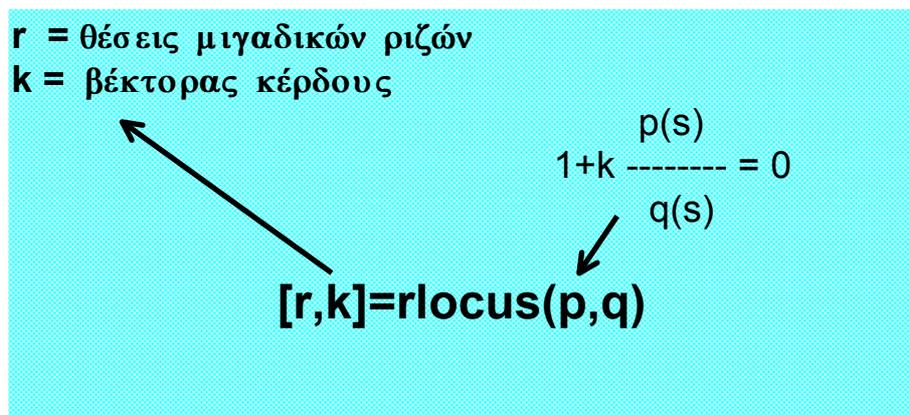
$$1 + k \frac{p(s)}{q(s)} = 0 ,$$

όπου k είναι η παράμετρος που θέλουμε να κειμένεται από $0 \leq k \leq \infty$. Η συνάρτηση rlocus δείχνεται στο σχήμα 67.



Σχήμα 66

Τα βήματα που ακολουθούμε για να πάρουμε το διάγραμμα

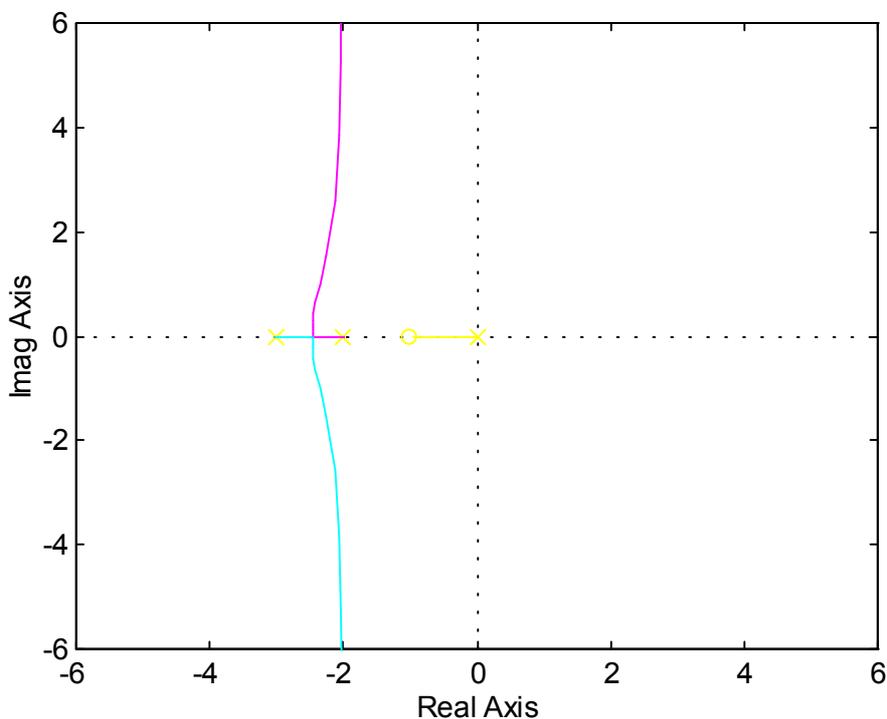


Σχήμα 67

τόπου ριζών του σχήματος 66 ,φαίνονται στο σχήμα 68α και 68β μαζί με το αντίστοιχο διάγραμμα. Καλώντας τη συνάρτηση rlocus χωρίς ορίσματα στο αριστερό της μέρος ,παίρνουμε αυτόματα το διάγραμμα τόπου ριζών. Όταν την καλούμε με ορίσματα , αυτή η συνάρτηση επιστρέφει μία μήτρα με τις θέσεις των ριζών και τον αντίστοιχο βέκτορα κέρδους .

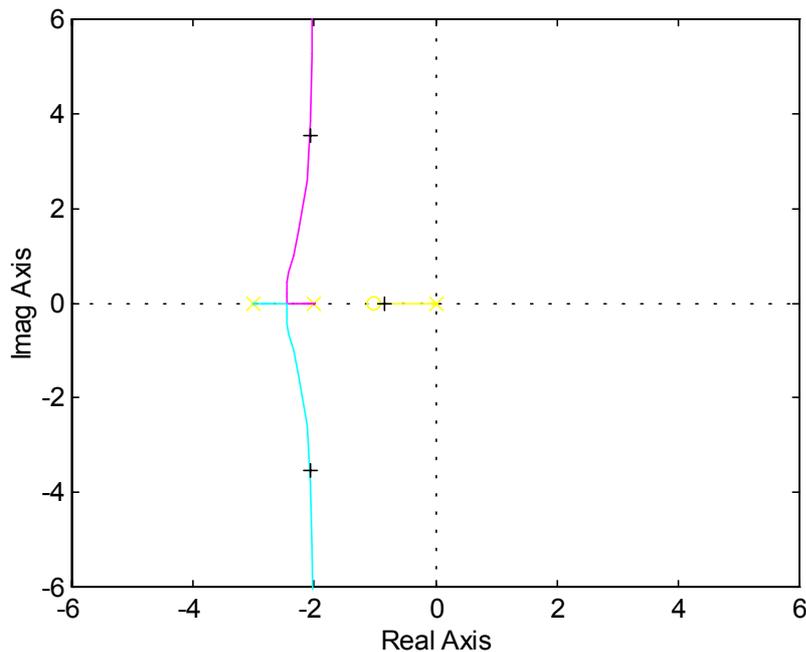
Τα βήματα που ακολουθούμε για το διάγραμμα τόπου ριζών είναι τα ακόλουθα:

1. Φέρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση στην κατάλληλη μορφή ,και
2. χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση rlocus για να πάρουμε το διάγραμμα.



```
>> p=[1 1];q=[1 5 6 0];rlocus(p,q)
```

Σχήμα 68α



Σχήμα 69

```

» p=[1 1];q=[1 5 6 0];rlocus(p,q)
» rlocfind(p,q)
Select a point in the graphics window

selected_point =

    -2.0647 + 3.5367i

ans =

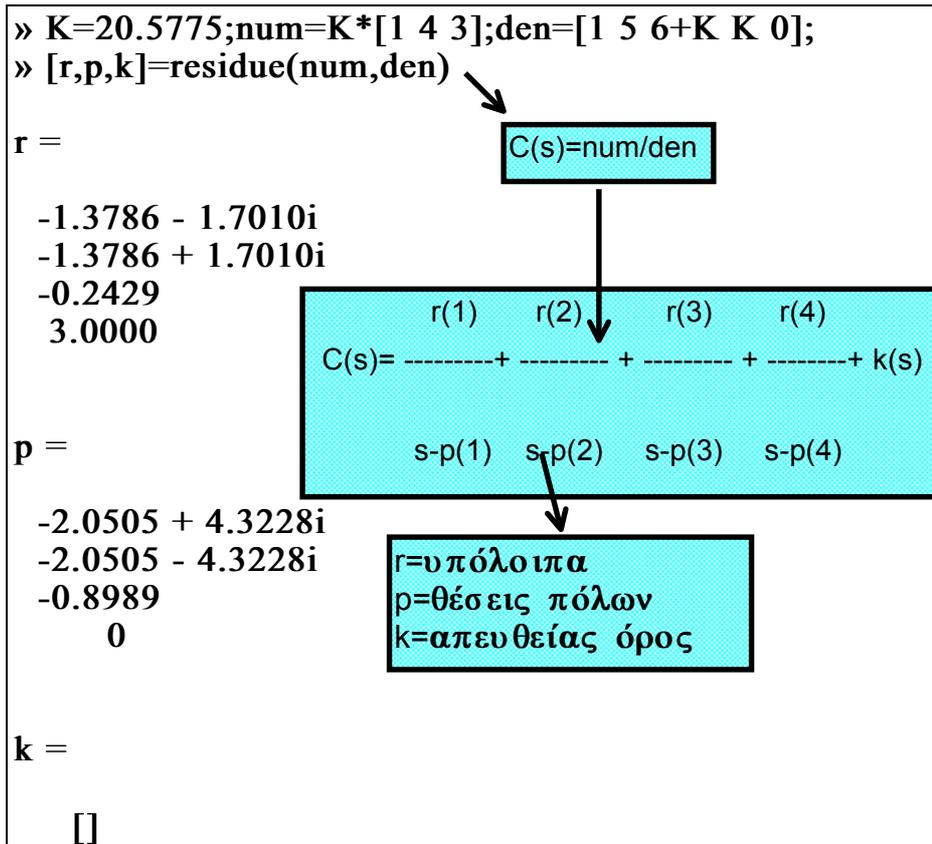
    14.3478

```

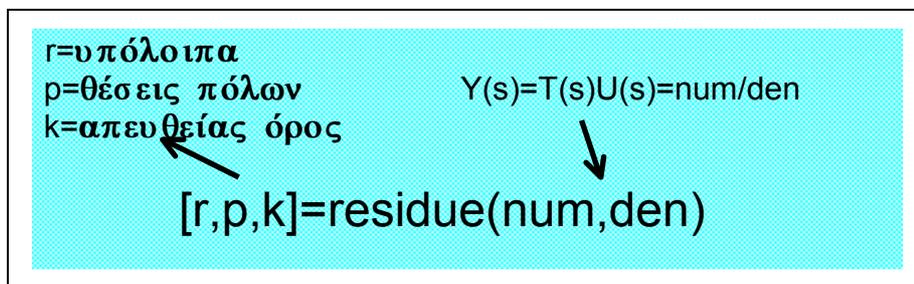
Θεωρώντας μόνο τις θέσεις των πόλων κλειστού βρόχου, αναμένουμε ότι ο πραγματικός πόλος στο $s=-0.8989$ θα είναι ο υπερισχύον πόλος. Για να το επαληθεύσουμε αυτό, θα μελετήσουμε την απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου για βηματική είσοδο, $R(s)=1/s$. Για βηματική είσοδο έχουμε ότι:

$$C(s) = \frac{20.5775(s+1)(s+3)}{s(s+2)(s+3)+20.5775(s+1)} \cdot \frac{1}{s} \quad (\text{εξίσωση 3})$$

Γενικά, το πρώτο βήμα στον υπολογισμό του $c(t)$ είναι να αναπτύξουμε την εξίσωση 3 σε μερικά κλάσματα. Η συνάρτηση residue χρησιμοποιείται σε αυτή τη περίπτωση, όπως φαίνεται στο σχήμα 70. Η περιγραφή αυτής της συνάρτησης φαίνεται στο σχήμα 71.



Σχήμα 70



Σχήμα 71

Η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα της εξίσωσης 3 είναι η εξής :

$$C(s) = \frac{-1.3786+1.7010i}{s+2.0505+4.3228i} + \frac{-1.3786+1.7010i}{s+2.0505+4.3228i} + \frac{-0.2429}{s+0.8989} + \frac{3}{s}$$

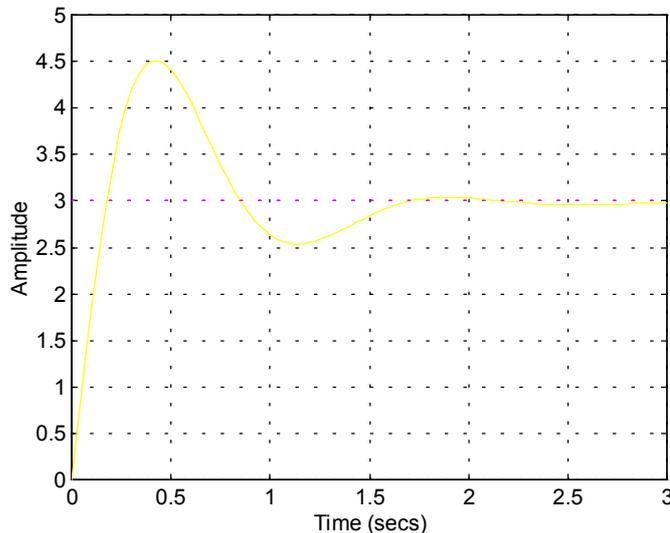
Συγκρίνοντας τα υπόλοιπα βλέπουμε ότι ο συντελεστής του όρου που αντιστοιχεί στον πόλο $s=-0.8989$ είναι αισθητά μικρότερος από τον συντελεστή των όρων που αντιστοιχεί στους μιγαδικούς συζυγείς πόλους στο $s=-2.0505 \pm 4.3227i$. Επομένως περιμένουμε ότι η επίδραση του πόλου στο $s=-0.8989$

στην απόκριση εξόδου $c(t)$ δεν είναι υπερσχύουσα. Άρα ο χρόνος αποκατάστασης υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη μας μόνο τους συζυγείς μιγαδικούς πόλους. Οι πόλοι στο $s=-2.0505\pm 4.32227i$ αντιστοιχούν σε απόσβεση $\zeta=0.4286$ και σε φυσική συχνότητα $\omega_n=4.7844$. Έτσι, ο χρόνος αποκατάστασης είναι : $T_s \approx 4/\zeta \omega_n = 1.95$ seconds.

Με τη συνάρτηση `step` (σχήμα 72), βρίσκουμε ότι $T_s \approx 1.6$ seconds. Επομένως η προσεγγισή μας $T_s \approx 1.95$ για το χρόνο αποκατάστασης είναι πάρα πολύ καλή. Το ποσοστό υπερύψωσης είναι :

$$P.O. \approx 100 \exp^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 22.5\% .$$

Όπως φαίνεται από το σχήμα 72, η πραγματική υπερύψωση είναι σχεδόν 50%. Είναι εμφανές ότι είναι πολύ μικρή η πρόβλεψη της υπερύψωσης.



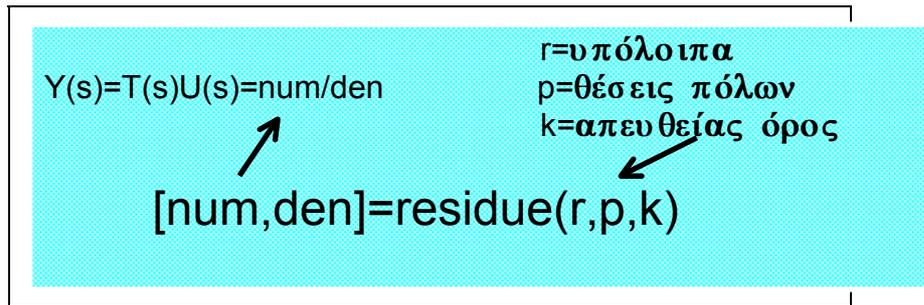
Σε αυτό το παράδειγμα δείχνεται ο ρόλος των μηδενικών του

```
» K=20.5775;num=K*[1 4 3];den=[1 5 6+K K];
» step(num,den),grid
```

Σχήμα 72

συστήματος στη μεταβατική απόκριση. Η προσέγγιση του πόλου $s=-0.8989$ με ένα μηδενικό στο $s=-1$ μειώνει την επίδραση του πόλου σε αυτή τη μεταβατική απόκριση. Οι συζυγείς μιγαδικοί πόλοι $s=-2.0505\pm 4.32227i$ είναι αυτοί που συνεισφέρουν τώρα κυρίως.

Χάρη στη συνάρτηση `residue` ξανά, μπορούμε να μετατρέψουμε την μερική ανάπτυξη σε κλάσματα στο αρχικό πολυώνυμο num/den , με την εντολή του σχήματος 73.



Σχήμα 73

3. Ευαισθησία και τύπος ριζών

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης παίζουν έναν σημαντικό ρόλο στο προσδιορισμό της μεταβατικής απόκρισης του συστήματος κλειστού βρόχου. Η επίδραση των μεταβολών μίας παραμέτρου στις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι μία χρήσιμη μέτρηση της ευαισθησίας. Η ευαισθησία ριζών μπορεί να οριστεί ως :

$$\frac{\partial r_i}{\partial k/k} \quad \text{(εξίσωση 4).}$$

Με την εξίσωση 4 επομένως μπορούμε να ερευνήσουμε την ευαισθησία των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης σε μεταβολές της παραμέτρου k. Αν αλλάξουμε το k κατά ένα μικρό πεπερασμένο ποσό Δk , και υπολογίσουμε την τροποποιημένη ρίζα $r_i + \Delta r_i$, από την εξίσωση 4 προκύπτει ότι :

$$S_k^{r_i} = \frac{\Delta r_i}{\Delta k/k} \quad \text{(εξίσωση 5).}$$

Η ποσότητα $S_k^{r_i}$ είναι μιγαδικός αριθμός. Αναφερόμενοι πάλι στο παράδειγμα τρίτης τάξης της προηγούμενης ενότητας, αν αλλάξουμε το K κατά έναν παράγοντα 5%, βρίσκουμε ότι ο υπερισχύων μιγαδικός συζυγής πόλος στο $s = -2.0505 + 4.3228i$ αλλάζει κατά :

$$\Delta r_i = -0.0025 - 0.1168i$$

όταν το K αλλάζει από $K = 20.5775$ σε $K = 21.6064$. Από την εξίσωση 5 βγάζουμε ότι :

$$S_k^{r_i} = \frac{-0.0025 - 0.1168i}{1.0289/20.5775} = -0.0494 - 2.3355i$$

Η ευαισθησία $S_k^{r_i}$ μπορεί να γραφτεί και ως εξής :

$$S_k^{r_i} = 2.3360 \angle 268.7872^\circ.$$

Το πλάτος και η διεύθυνση του $S_k^{r_i}$ παρέχουν μία μέτρηση της ευαισθησίας ριζών. Το Μ-αρχείο που παρουσιάζει τους πιο πάνω υπολογισμούς για την ευαισθησία βρίσκεται στο σχήμα 74.

sensitiv.m

```
%Compute the system sensitivity to a parameter
%variation
%
K=20.5775;den=[1 5 6+K K];r1=roots(den);
%
dk=1.0289;
%
km=K+dk;denm=[1 5 6+km km];r2=roots(denm);
dr=r1-r2;
%
S=dr/(dk/K);
```

Σχήμα 74

όπου μέσα από την οθόνη εντολών του MATLAB μπορούμε να πάρουμε ότι πληροφορία θέλουμε για το sensitiv.m :

» r1

r1 =

$$-2.0505 + 4.3228i$$

$$-2.0505 - 4.3228i$$

$$-0.8989$$

» r2

r2 =

$$-2.0481 + 4.4395i$$

$$-2.0481 - 4.4395i$$

$$-0.9039$$

» dr

dr =

$$-0.0025 - 0.1168i$$

$$-0.0025 + 0.1168i$$

$$0.0049$$

» S

S =

$$-0.0494 - 2.3355i$$

$$-0.0494 + 2.3355i$$

$$0.0989$$

Η μέτρηση της ευαισθησίας μπορεί να φανεί χρήσιμη για τη σύγκριση της ευαισθησίας για διάφορες παραμέτρους του συστήματος σε διαφορετικές θέσεις ριζών.

Ωστόσο, αυτή η μέτρηση ίσως να μην είναι τόσο χρήσιμη όταν χρησιμοποιείται στη διαδικασία σχεδιασμού. Είναι πρωταρχικά μία μέτρηση ανάλυσης.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

1. Εισαγωγή

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος είναι η απόκριση εξόδου σταθερής κατάστασης που οφείλεται σε ημιτονικό σήμα εισόδου. Σε προηγούμενα κεφάλαια συζητήσαμε την απόκριση του συστήματος για διάφορα σήματα εισόδου (βηματική, ράμπας, παραβολική και κρουστική). Σε αυτό το κεφάλαιο ,θα εξετάσουμε την απόκριση του συστήματος για ημιτονική είσοδο.

Οι μέθοδοι απόκρισης συχνότητας βασίζονται στην απόκριση των γραμμικών συστημάτων για ημιτονικά σήματα εισόδου ,καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα του ημιτονικού σήματος. Ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα έχει το χαρακτηριστικό ότι, στη σταθερή κατάσταση, η απόκριση ημιτονικής εισόδου διαφέρει από το σήμα εισόδου μόνο στο πλάτος και στη φάση. Η συνάρτηση μεταφοράς που περιγράφει την ημιτονική συμπεριφορά του συστήματος παίρνεται αντικαθιστώντας το s με το $j\omega$ στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $G(s)$. Τότε ,για ένα συγκεκριμένο ω , το $G(j\omega)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με πλάτος και φάση. Το πλάτος και η φάση του $G(j\omega)$ μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικά καθώς μεταβάλλεται το ω . Αυτή η γραφική αναπαράσταση είναι γνωστή σαν *διάγραμμα Bode*. Είναι δυνατό να παρουσιάζονται οι προδιαγραφές ενός συστήματος ελέγχου στο πεδίο των συχνοτήτων ,επομένως μία αποτελεσματική μεθοδολογία σχεδιασμού χρησιμοποιώντας τα διαγράμματα Bode μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Το κεφάλαιο αρχίζει με εισαγωγή στα διαγράμματα Bode. Μετά, η σχέση ανάμεσα στην απόκριση συχνότητας και την παρουσίαση των προδιαγραφών στο πεδίο του χρόνου θα συζητηθεί. Το κεφάλαιο κλείνει με ένα επεξηγηματικό παράδειγμα, ώστε να αποκτήσουμε εμπειρία στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου στο πεδίο των συχνοτήτων.

Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε είναι οι bode και logspace. Η συνάρτηση bode δημιουργεί το διάγραμμα Bode, ενώ η logspace δημιουργεί έναν βέκτορα συχνοτήτων με λογαριθμική διάταξη, ο οποίος χρησιμοποιείται από τη συνάρτηση bode.

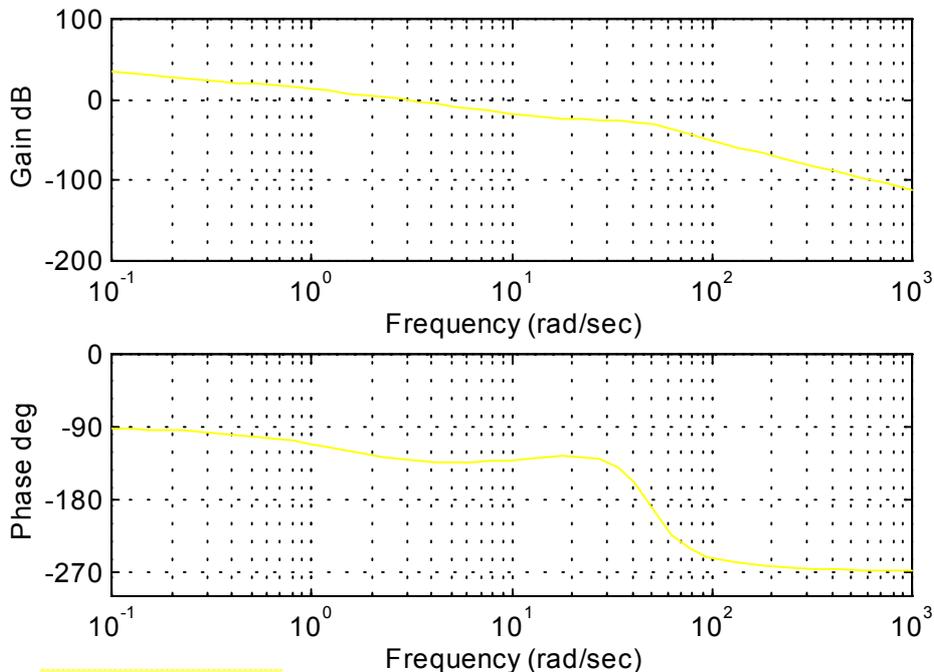
2. Διαγράμματα Bode

Εστω ότι έχουμε την εξής συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{5(1+0.1s)}{s(1+0.5s)(1+(0.6/50)s+(1/50^2)s^2)} \quad (\text{εξίσωση 6}) .$$

Το αντίστοιχο διάγραμμα Bode μαζί με το αντίστοιχο M-αρχείο φαίνονται στο σχήμα 75. Το ένα διάγραμμα αποτελείται από το λογαριθμικό κέρδος σε dB προς το ω ,ενώ το άλλο από τη φάση $\phi(\omega)$ προς το ω . Όπως και με τα διαγράμματα τύπου ριζών, δεν

πρέπει να βασίζεστε μόνο στο MATLAB για τη δημιουργία Bode διαγραμμάτων. Το MATLAB είναι απλώς άλλο ένα εργαλείο του σχεδιασμού και της ανάλυσης των συστημάτων ελέγχου. Είναι πολύ σημαντικό να ξέρετε να βγάξετε μόνοι σας προσεγγιστικά αυτά τα διαγράμματα. Δεν υπάρχει άλλο υποκατάστατο για την πλήρη κατανόηση της θεωρίας.



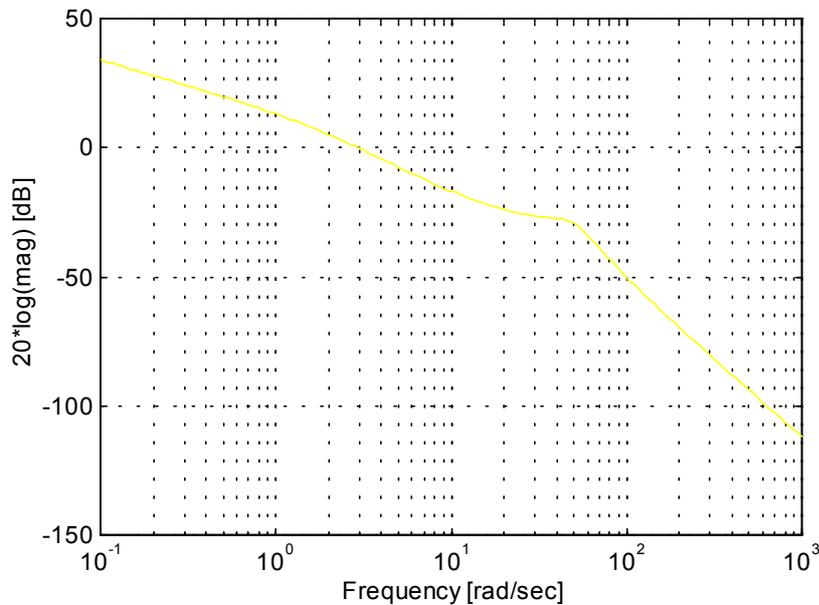
`bodescr.m`

```
%Bode plot script
%
num=5*[0.1 1];
f1=[1 0];f2=[0.5 1];f3=[1/2500 0.6/50 1];
den=conv(f1,conv(f2,f3));
%
bode(num,den)
```

Σχήμα 75

Ένα Bode διάγραμμα δημιουργείται αυτόματα αν η συνάρτηση `bode` κληθεί χωρίς ορίσματα στο αριστερό της μέρος. Στο σχήμα 75 βλέπουμε ότι η συνάρτηση `bode` επιλέγει αυτόματα το εύρος των συχνοτήτων από $\omega=0.1$ έως 1000 rad/sec (αυτό το εύρος γίνεται επιλεγόμενο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `logspace`). Αν όμως η συνάρτηση `bode` έχει ορίσματα στο αριστερό της μέρος, τα χαρακτηριστικά του πλάτους και της φάσης τοποθετούνται στο χώρο εργασίας του MATLAB στις μεταβλητές `mag` και `phase`. Το διάγραμμα Bode το παίρνουμε χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `plot` με τα `mag`, `phase` και ω . Ο βέκτορας ω για τον οποίο υπολογίζεται το Bode διάγραμμα, περιέχει τις τιμές της συχνότητας σε rad/sec.

Αν το ω δεν προσδιορίζεται, το MATLAB αυτόματα επιλέγει τις τιμές αυτές, τοποθετώντας περισσότερα σημεία στις περιοχές όπου η απόκριση συχνότητας αλλάζει γρήγορα. Εφόσον αυτά τα διαγράμματα είναι λογαριθμικής κλίμακας, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε αναλυτικά τις συχνότητες, είναι προτιμότερο να δημιουργήσουμε τον βέκτορα ω με τη συνάρτηση `logspace` (σχήμα 76).



```

» w=logspace(-1,3,200);
» [mag,phase,w]=bode(num,den,w);
» semilogx(w,20*log10(mag)),grid
» xlabel('Frequency [rad/sec]'),ylabel('20*log(mag) [dB]')

```

Σχήμα 76

Η δήλωση `w=logspace(a,b,n)` φτιάχνει έναν λογαριθμικό βέκτορα με n σημεία ανάμεσα στο 10^a και στο 10^b . Ενώ η δήλωση :

```
[mag,phase,w]=bode(num,den,w)
```

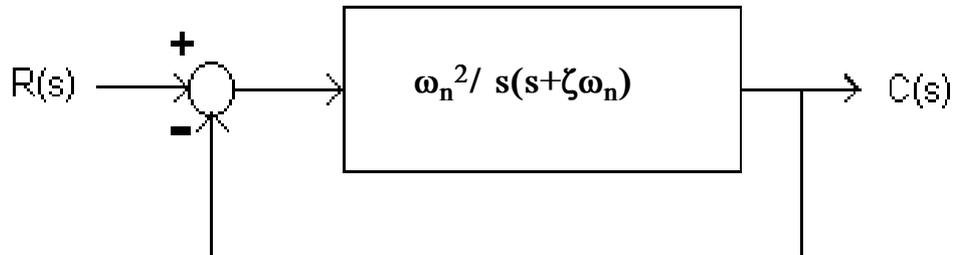
δημιουργεί το διάγραμμα Bode της $G(s)=\text{num}/\text{den}$, όπου το w είναι προαιρετικό εφόσον είναι η εφαρμοζόμενη από το χρήστη συχνότητα.

3. Προδιαγραφές στο πεδίο των συχνοτήτων

Έχοντας πάντα υπόψη μας το σκοπό του σχεδιασμού των συστημάτων ελέγχου, δηλαδή ότι θα ικανοποιούν κάποιες δεδομένες προδιαγραφές παρουσίας στο πεδίο του χρόνου, πρέπει να συνδέσουμε την απόκριση συχνότητας και τη μεταβατική απόκριση χρόνου του συστήματος. Η σχέση ανάμεσα στις προδιαγραφές που δίνονται στο πεδίο του χρόνου με αυτές που δίνονται στο πεδίο των

συχνοτήτων εξαρτάται από την προσέγγιση του συστήματος από ένα σύστημα δευτέρου βαθμού με τους πόλους να είναι οι *υπερισχύουσες* ρίζες του συστήματος.

Θεωρήστε το σύστημα δευτέρου βαθμού του σχήματος 77.



Σχήμα 77

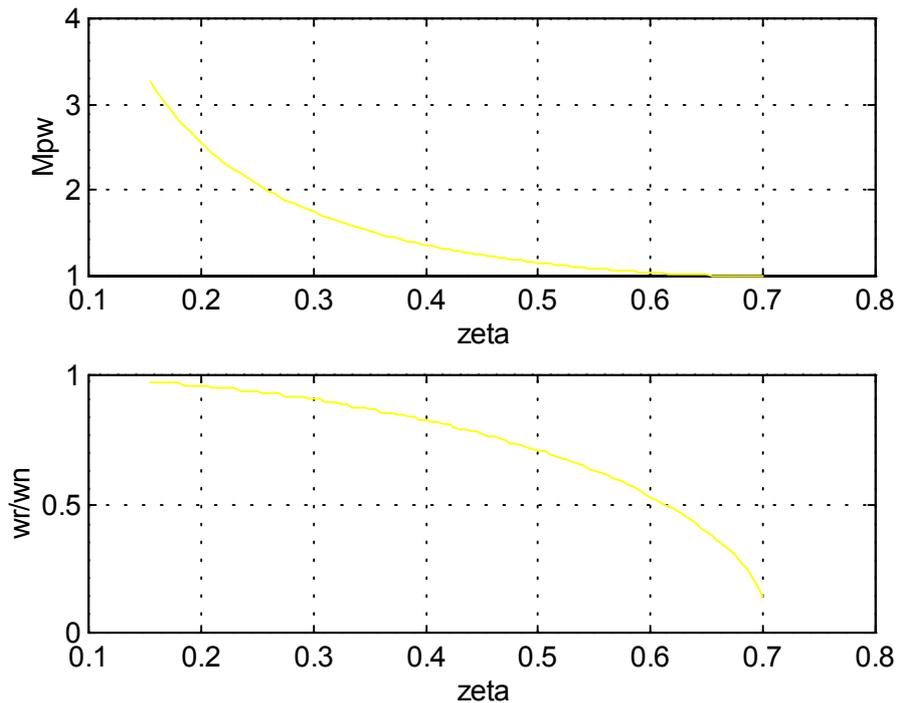
Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι η:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{εξίσωση 7}).$$

Τα χαρακτηριστικά του Bode διαγράμματος πλάτους που σχετίζονται με τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου της εξίσωσης 7, φαίνονται στον πίνακα 7, ο οποίος περιέχει τις προδιαγραφές παρουσίας. Η σχέση ανάμεσα στη συχνότητα συντονισμού, ω_r , τη μέγιστη απόκριση συχνότητας, $M_{p\omega}$, το λόγο απόσβεσης, ζ , και τη φυσική συχνότητα, ω_n , φαίνεται στο σχήμα 78. Η πληροφορία που παίρνουμε από τις σχέσεις του σχήματος 78 θα είναι σχεδόν χρήσιμη στο σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου στο πεδίο συχνοτήτων εφόσον ικανοποιεί τις προδιαγραφές στο πεδίο του χρόνου.

Πίνακας 7

| πεδίο χρόνου | ↔ | πεδίο συχνοτήτων |
|-----------------|---|------------------|
| ζ | | $M_{p\omega}$ |
| χρόνος ανύψωσης | | ω_b |
| υπερύψωση | | $M_{p\omega}$ |



relation.m

```

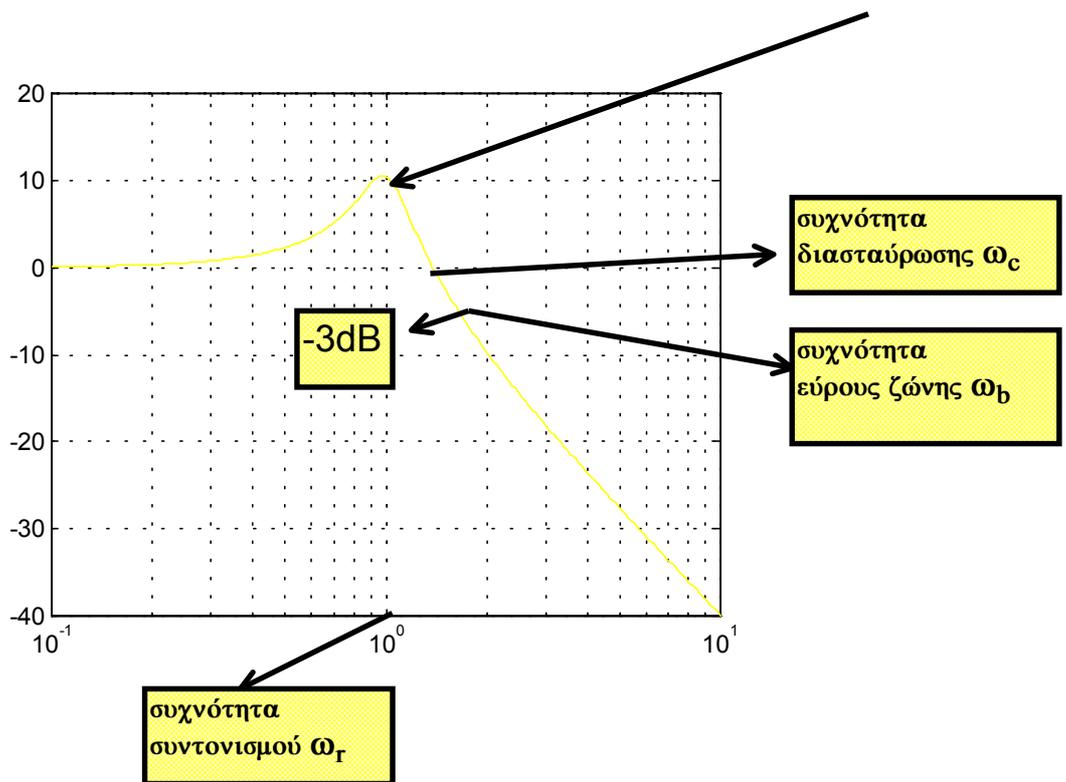
wn=1;zeta=0.15;
w=logspace(-1,1,400);
num=wn^2;
for i=1:110
    zeta=zeta+0.005;
    den=[1 2*zeta*wn wn^2];
    [mag,phase,w]=bode(num,den,w);
    z(i)=zeta;[mp(i),I]=max(mag);wr(i)=w(I);
end
subplot(211),plot(z,mp),grid
xlabel('zeta'),ylabel('Mpw')
subplot(212),plot(z,wr),grid
xlabel('zeta'),ylabel('wr/wn')

```

κορυφή
συντονισμού
 M_{pw}

Όπως είδαμε μπορούμε να συσχετίσουμε τις προδιαγραφές στο πεδίο συχνοτήτων με αυτές στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιώντας τις

Σχήμα 78 : Η σχέση ανάμεσα στα (M_{pw}, ω_r) και (ζ, ω_n) για 2^ο βαθμού σύστημα. πληροφορίες που περιέχονται στα Bode διαγράμματα κλειστού βρόχου (σχήμα 79).



Σχήμα 79 : Χαρακτηριστικά συστήματος κλειστού βρόχου δευτέρου βαθμού.

Η ευστάθεια είναι ένα σπουδαίο θέμα (θα εξεταστεί στο επόμενο κεφάλαιο) το οποίο μπορεί να μελετηθεί στο πεδίο των συχνοτήτων, θεωρώντας τη συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου.

4. Παράδειγμα: Σύστημα μηχανής χάραξης

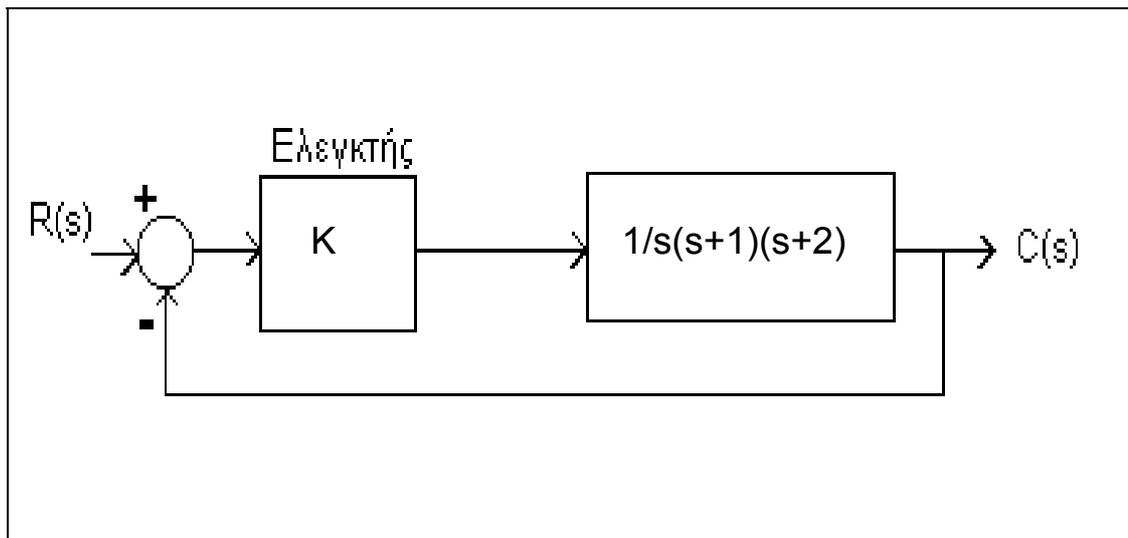
Θεωρήστε το μπλοκ διάγραμμα του μοντέλου στο σχήμα 80. Ο σκοπός μας είναι να σχεδιάσουμε το K έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει μία παραδεκτή χρονική απόκριση σε μία βηματική είσοδο. Αρχικά διαλέγουμε $K=2$ και ακολούθως γίνεται αλλαγή του K αν έχουμε μη αποδεκτή παρουσίαση. Το M -αρχείο του σχήματος 81 χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό. Η τιμή του K καθορίζεται από το επίπεδο εντολών. Μετά εκτελείται το M -αρχείο και παράγεται το διάγραμμα Bode κλειστού βρόχου. Οι τιμές των $M_{p\omega}$ και ω_T προσδιορίζονται με έλεγχο των διαγραμμάτων Bode. Αυτές οι τιμές χρησιμοποιούνται μαζί με αυτές του σχήματος 78 για να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες τιμές των ζ και ω_n . Όταν έχουν δοθεί τα ζ , και ω_n , ο χρόνος αποκατάστασης και το ποσοστό επί της εκατό της υπερύψωσης υπολογίζονται από τους εξής τύπους :

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}, \quad P.O. \approx 100 \exp\left(-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right).$$

Αν οι προδιαγραφές του πεδίου του χρόνου δεν ικανοποιούνται, ρυθμίζουμε το K και επαναλαμβάνουμε πάλι τα πιο πάνω βήματα.

Οι τιμές των ζ και ω_n που αντιστοιχούν σε $K=2$ είναι $\zeta=0.29$ και $\omega_n=0.88$. Αυτό οδηγεί σε μία πρόβλεψη των $P.O.=38\%$ και $T_s=16$ seconds. Η βηματική απόκριση, σχήματα 82α και β, επαληθεύει ότι οι προβλέψεις παρουσίασης είναι σχεδόν ακριβείς και το σύστημα κλειστού βρόχου παρουσιάζεται επαρκώς.

Σχήμα 80



enr1.m

```
num=[K];den=[1 3 2 K];
w=logspace(-1,1,400);
[mag,phase,w]=bode(num,den,w);
[mp,I]=max(mag); wr=w(I);
mp,wr
```

enr2.m

```
ts=4/zeta/wn
po=100*exp(-zeta*pi/sqrt(1-zeta^2))
```

```

» K=2; engr1
mp =
    1.8371

wr =
    0.8171
»
» zeta=0.29; wn=0.88; engr2
ts =
    15.6740

po =
    38.5979

```

Προσδιορίζουμε τα ω_n και ζ από σχήματα παρόμοια με το σχήμα 78, χρησιμοποιώντας το $M_{p\omega}$ και το ω_r .

Σχήμα 81

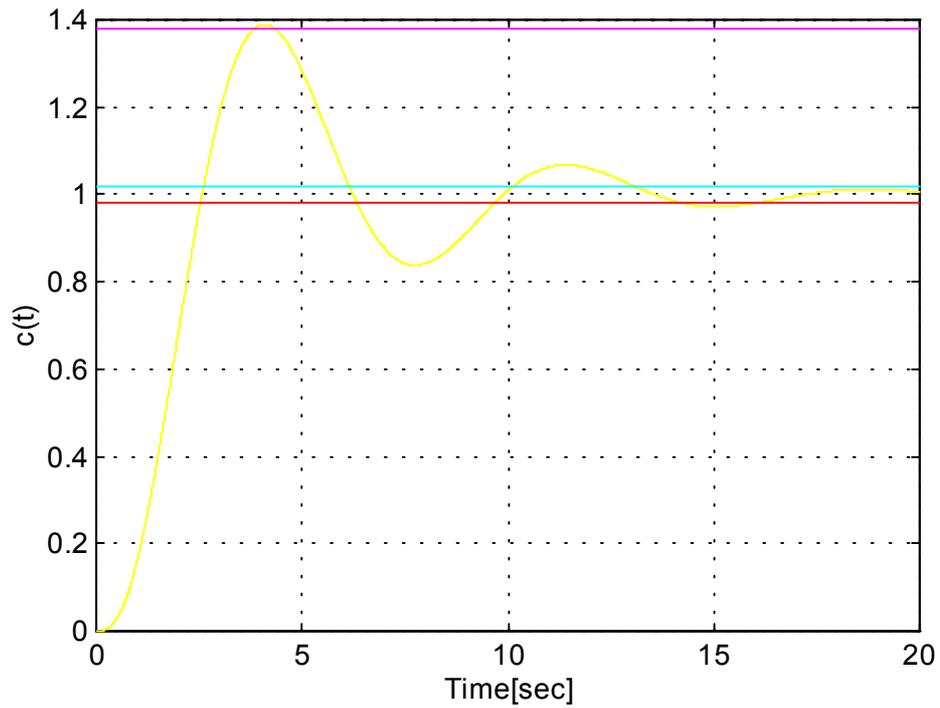
engrave.m

```

K=2; num=[K]; den=[1 3 2 K];
t=[0:0.01:20];
Iu=1.02*ones(length(t),1);
II=0.98*ones(length(t),1);
I=1.38*ones(length(t),1);
[y,x]=step(num,den,t);
plot(t,y,t,I,t,Iu,t,II),grid
xlabel('Time[sec]'),ylabel('c(t)')

```

Σε αυτό το παράδειγμα, η προσέγγιση του συστήματος δεύτερης τάξης είναι λογική και οδηγεί σε αποδεκτό σχεδιασμό. Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση μπορεί να μην οδηγεί πάντα σε καλό σχεδιασμό.



Σχήμα 82α

Ευτυχώς με το MATLAB έχουμε τη δυνατότητα να μειώσουμε τη δικιά μας επίδραση σε αυτούς τους υπολογισμούς πολύ εύκολα, εφόσον μας παρέχει ένα πλήθος κλασσικών και μοντέρνων εργαλείων ελέγχου.

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

1. Εισαγωγή

Η ευστάθεια ενός συστήματος ελέγχου μπορεί να προσδιοριστεί με μεθόδους απόκρισης συχνότητας. Η βάση για την ανάλυση της ευστάθειας στο πεδίο των συχνοτήτων είναι το κριτήριο ευστάθειας Nyquist. Θέματα απόλυτης ευστάθειας μπορούν να διευθετηθούν το ίδιο καλά στο πεδίο των συχνοτήτων, όπως και της σχετικής ευστάθειας. Οι μέθοδοι γραφικών παίζουν ένα σπουδαίο ρόλο στη σχεδίαση και ανάλυση των συστημάτων ελέγχου στο πεδίο συχνοτήτων.

Αυτό το κεφάλαιο αρχίζει με συζήτηση για το κριτήριο ευστάθειας Nyquist και για τα διαγράμματα Nyquist. Θα επανεξετάσουμε τα διαγράμματα Bode όταν αναφερθούμε στη σχετική ευστάθεια. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόκριση συχνότητας της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου, $T(j\omega)$, καθώς και τη συνάρτηση μεταφοράς βρόχου, $GH(j\omega)$. Θα παρουσιάσουμε ένα επεξηγηματικό παράδειγμα για το πώς εισάγεται καθυστέρηση σε ένα σύστημα χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Padé.

Οι συνάρτησεις που καλύπτονται από αυτό το κεφάλαιο είναι οι nyquist, margin και pade.

2. Διαγράμματα Nyquist

Το κριτήριο ευστάθειας Nyquist βασίζεται στο θεώρημα του Cauchy, το οποίο αναφέρεται σε αναπαράσταση περιγραμμάτων στο μιγαδικό s -επίπεδο. Θεωρήστε το σύστημα του σχήματος 83. Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι :

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+GH(s)},$$

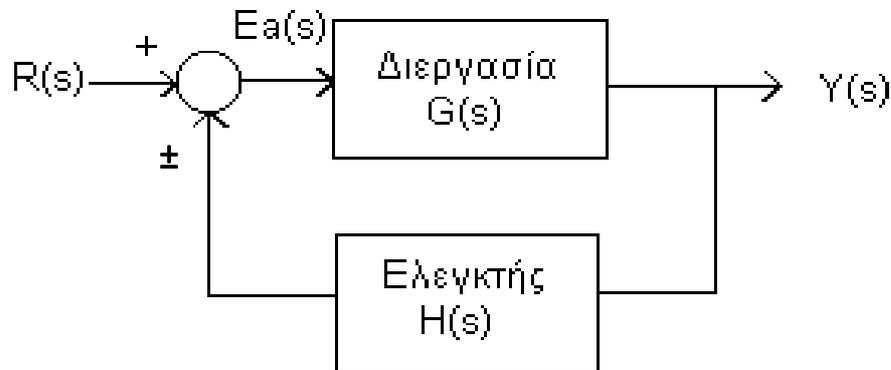
και η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η εξής :

$$F(s) = 1+GH(s) = 0.$$

Όλα τα μηδενικά της $F(s)$ πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του s -επιπέδου για να υπάρχει ευστάθεια. Διαλέγουμε ένα περίγραμμα, Γ_s , στο s -επίπεδο, το οποίο περικλείει ολόκληρο το δεξί του ημιεπίπεδο, και σχεδιάζουμε το Γ_f στο $F(s)$ -επίπεδο και προσδιορίζουμε τον αριθμό των περιστροφών γύρω από την αρχή. Ισοδύναμα, μπορούμε να σχεδιάσουμε το Γ_p στο $P(s)$ -επίπεδο και να προσδιορίσουμε τον αριθμό των περιστροφών γύρω από το σημείο -1 , όπου $P(s) = F(s) - 1$. Το κριτήριο ευστάθειας Nyquist μπορεί να διατυπωθεί ως ακολούθως :

- Ένα σύστημα ελέγχου με ανατροφοδότηση είναι σταθερό αν και μόνο αν, για τα περιγράμματα Γ_p , ο αριθμός των περιστροφών κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από το σημείο $(-$

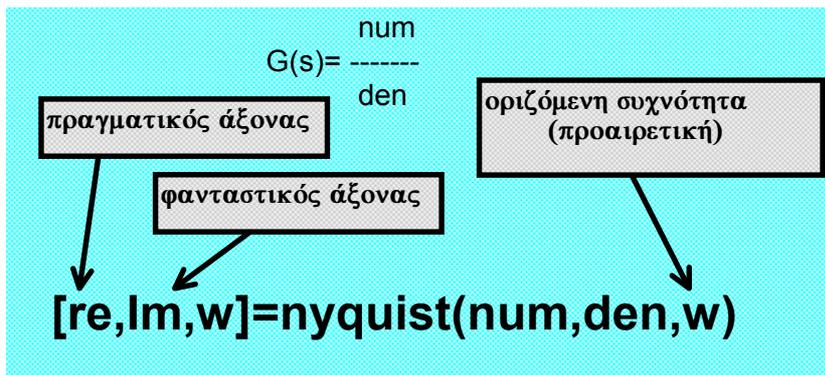
1,0) είναι ίσος με τον αριθμό των πόλων του $P(s)$ με θετικά πραγματικά μέρη.



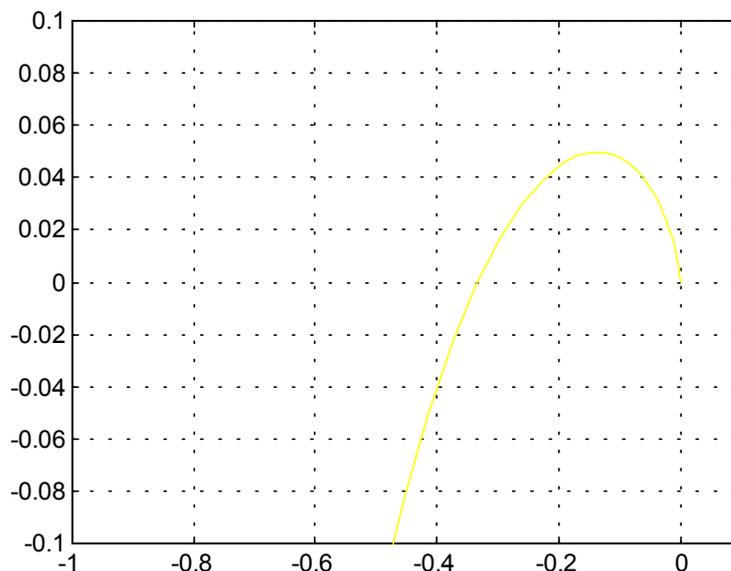
Σχήμα 83

Το διάγραμμα Nyquist είναι το διάγραμμα του Γ_p . Γενικά είναι πιο δύσκολο να κατασκευάσουμε μόνοι μας διαγράμματα Nyquist από ότι διαγράμματα Bode. Ωστόσο με το MATLAB δημιουργούνται μάλλον εύκολα, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση nyquist (σχήμα 84). Όταν αυτή η συνάρτηση χρησιμοποιείται χωρίς ορίσματα στο αριστερό της μέρος, το διάγραμμα Nyquist δημιουργείται αυτόματα, διαφορετικά πρέπει να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση plot με τους βέκτορες re και Im για να δημιουργηθεί το διάγραμμα.

Μία προειδοποιητική παρατήρηση για τα διαγράμματα Nyquist : Μερικές φορές κατά τη χρησιμοποίηση της συνάρτησης nyquist μπορεί τα διαγράμματα να φαίνονται περίεργα ή να φαίνεται ότι κάτι τους λείπει. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση axis για να παραμερίσει την αυτόματη κλίμακα και μετά να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση nyquist με ορίσματα στο αριστερό της μέρος σε συνδυασμό με τη συνάρτηση plot. Με αυτόν τον τρόπο πρέπει να εστιάσετε την προσοχή σας στη περιοχή του σημείου -1 για την ανάλυση της ευστάθειας (σχήμα 85). Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε θεωρήσει μόνο απόλυτη ευστάθεια. Με άλλα λόγια, όλη μας η έννοια ήταν τότε ένα σύστημα είναι σταθερό ή όχι. Ωστόσο, μετρήσεις σχετικής ευστάθειας μπορούν να γίνουν από τα περιθώρια κέρδους και φάσης των διαγραμμάτων Bode ή των διαγραμμάτων Nyquist. Το περιθώριο κέρδους είναι μία μέτρηση του πόσο πολύ θα αυξηθεί το κέρδος του συστήματος για τον τόπο του $GH(j\omega)$ για να περάσει το σημείο $(-1,0)$, αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα ασταθές σύστημα.



Σχήμα 84



```

» num=[0.5];den=[1 2 1 0.5];
» [re,Im]=nyquist(num,den);
» plot(re,Im),axis([-1.0,.1,-0.1,0.1]),grid

```

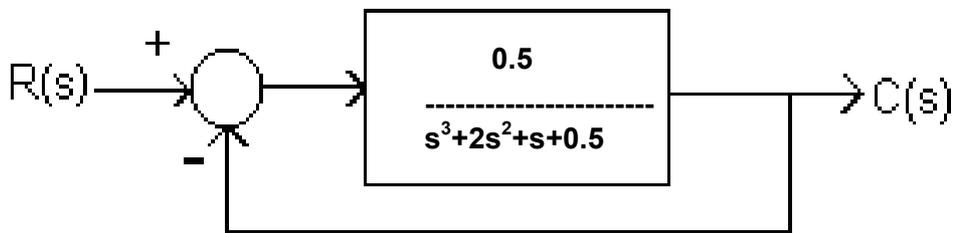
Σχήμα 85

Θεωρήστε το σύστημα του σχήματος 86. Η σχετική ευστάθεια μπορεί να προσδιοριστεί από το διάγραμμα Bode χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `margin` (σχήμα 88). Η συνάρτηση `margin` καλείται σε συνδυασμό με τη συνάρτηση Bode για να υπολογιστούν τα περιθώρια κέρδους και φάσης. Αν η συνάρτηση `margin` καλείται χωρίς ορίσματα στο αριστερό της μέρος,

το διάγραμμα Bode φτιάχνεται αυτόματα με τα περιθώρια κέρδους και φάσης πάνω στο διάγραμμα (σχήμα 87).

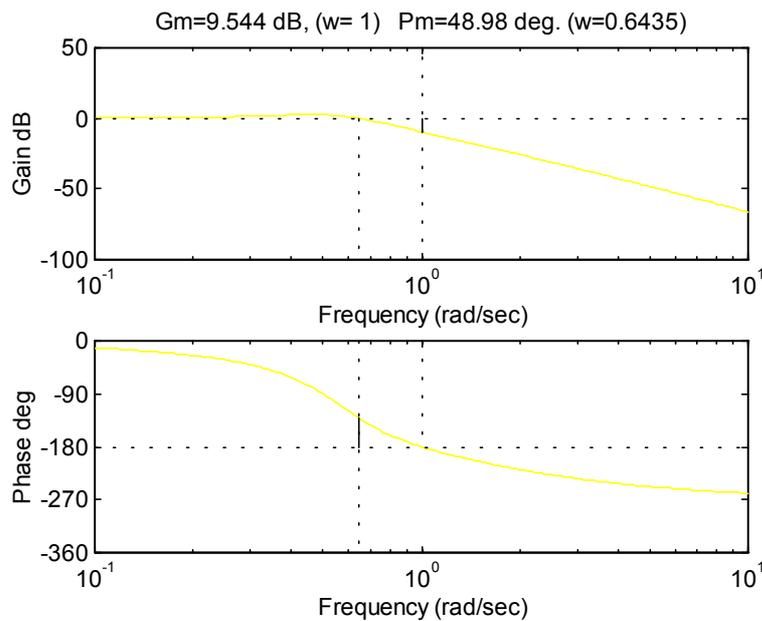
Το M-αρχείο που δημιουργεί το διάγραμμα Nyquist του συστήματος του σχήματος 86 βρίσκεται στο σχήμα 89. Σε αυτή τη περίπτωση, ο αριθμός των πόλων του $GH(s)$ με θετικά πραγματικά μέρη είναι μηδέν και ο αριθμός των περιστροφών με τη φορά του ρολογιού γύρω από το -1 είναι μηδενικός· επομένως το σύστημα κλειστού βρόχου είναι σταθερό. Μπορούμε να προσδιορίσουμε επίσης τα περιθώρια κέρδους και φάσης με το τρόπο που δείχνει το σχήμα 89.

```
num=[0.5];
den=[1 2 1 0.5];
%
w=logspace(-1,1,200);
%
[mag,phase,w]=bode(num,den,w);
%
margin(mag,phase,w);
%bode(num,den,w);
```



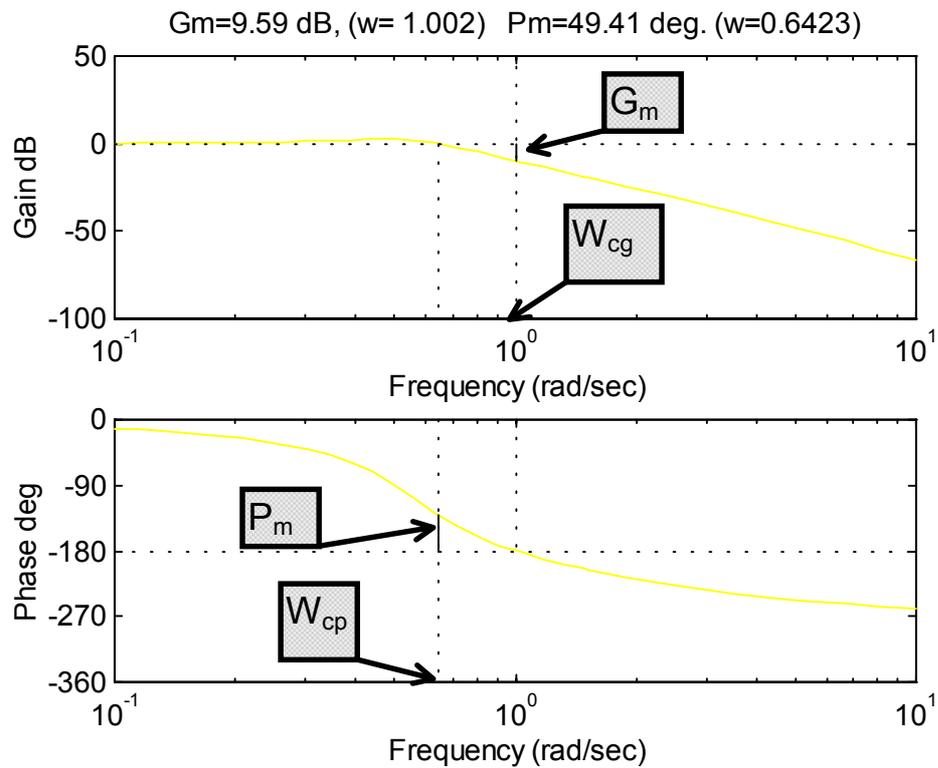
Σχήμα 86

simpbode.m



Σχήμα 87

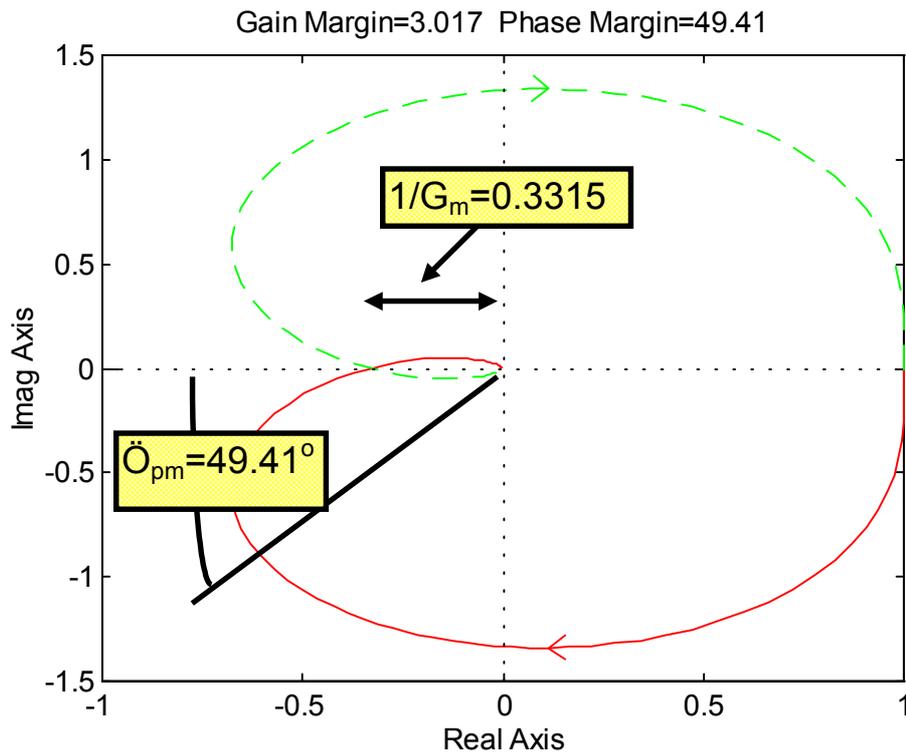
`[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w)`



Σχήμα 88

G_m =περιθώριο κέρδους
 P_m =περιθώριο φάσης
 W_{cg} =συχνότητα για φάση=-180°
 W_{cp} =συχνότητα για κέρδος=0 dB

```
» num=[0.5];den=[1 2 1 0.5];
» [mag,phase,w]=bode(num,den);
» margin(mag,phase,w);
```



nyqplot.m

```
%Plot Nyquist and compute Gain and Phase
%Margins for GH(s)=0.5/s^3+2s^2+s+0.05
%
num=[0.5];den=[1 2 1 0.5];
%
[mag,phase,w]=bode(num,den);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
%
nyquist(num,den)
title(['Gain Margin=',num2str(Gm),' Phase Margin=',num2str(Pm)])
```

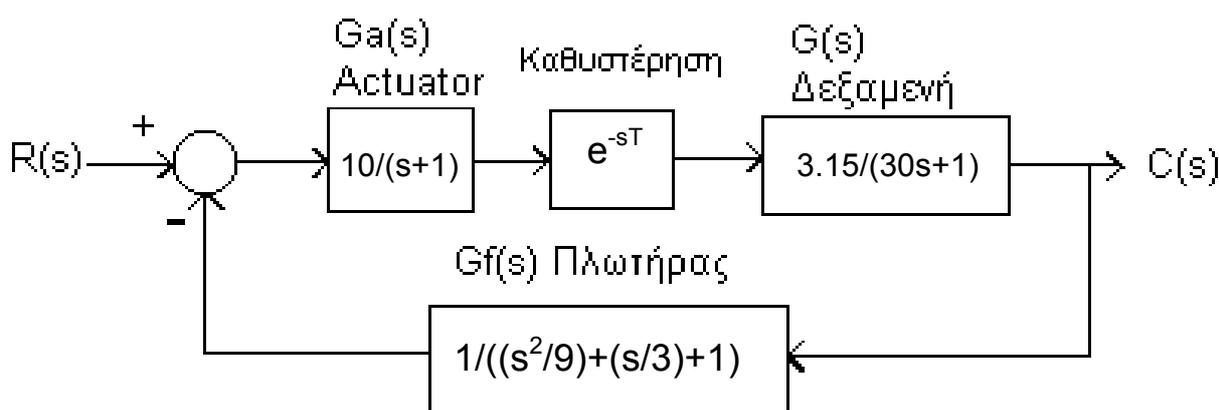
Σχήμα 89

3. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο : Σύστημα ελέγχου στάθμης υγρών

Θεωρήστε το σύστημα ελέγχου στάθμης υγρών που περιγράφεται από το μπλοκ διάγραμμα του σχήματος 90. Παρατηρήστε ότι το σύστημα έχει χρονική καθυστέρηση. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι η εξής:

$$GH(s) = \frac{31.5}{(s+1)(30s+1)((s^2/9)+(s/3)+1)} \exp^{-sT} \quad (\text{εξίσωση 8}) .$$



Σχήμα 90

Εφόσον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το MATLAB στην ανάλυσή μας ,θα πρέπει να αλλάξουμε την εξίσωση 8 με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το $GH(s)$ να έχει τέτοια μορφή συνάρτησης μεταφοράς ώστε να έχει ένα πολυώνυμο στον αριθμητή και ένα στον πάρανομαστή. Για να το πετύχουμε αυτό ,θα πρέπει να κάνουμε προσέγγιση στο e^{-sT} με τη συνάρτηση $padé$ (σχήμα 91). Για παράδειγμα υποθέστε ότι η καθυστέρησή μας είναι $T=1$ second και θέλουμε μία προσέγγιση δεύτερης τάξης $n=2$. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $padé$ βρίσκουμε ότι :

$$e^{-sT} \approx \frac{0.0743s^2 - 0.4460s + 0.8920}{0.0743s^2 + 0.4460s + 0.8920} \quad (\text{εξίσωση 9}).$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 9 στην εξίσωση 8 έχουμε ότι :

$$31.5(0.0743s^2 - 0.4460s + 0.8920)$$

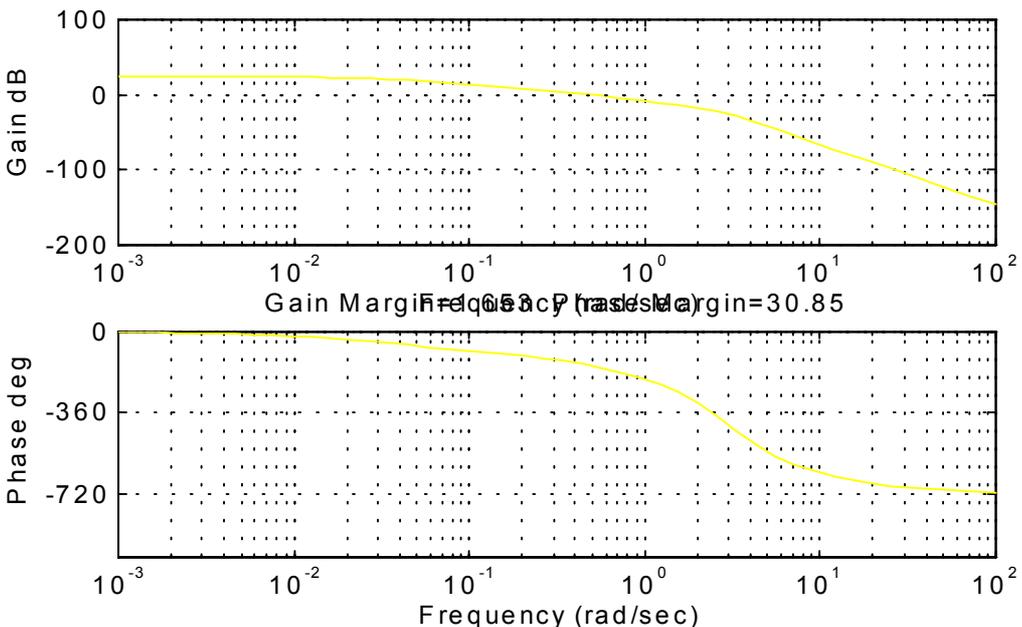
$$GH(s) \approx \frac{(s+1)(30s+1)((s^2/9)+(s/3)+1)(0.0743s^2+0.4460s+0.8920)}{\dots}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να φτιάξουμε ένα M-αρχείο για να βρούμε τη σχετική ευστάθεια του συστήματος χρησιμοποιώντας το διάγραμμα Bode. Ο σκοπός μας είναι να έχουμε ένα περιθώριο φάσης 30 μοιρών. Το αντίστοιχο M-αρχείο και τα αντίστοιχα διαγράμματα βρίσκονται στα σχήματα 92α και β. Για να είναι το M-αρχείο συνεχώς μεταβαλλόμενο, αφήνουμε να είναι μεταβλητό το κέρδος K (τώρα το θέτουμε K=31.5) κι έτσι προσδιορίζεται έξω από το M-αρχείο (από το επίπεδο διαταγών). Αφού ορίσουμε το K και τρέξουμε το M-αρχείο για να ελέγξουμε το περιθώριο φάσης, επαναλαμβάνουμε αν είναι αναγκαίο. Το τελικό επιλεγόμενο κέρδος είναι K=16. Θυμηθείτε ότι χρησιμοποιήσαμε μία προσέγγιση Padé, δεύτερης τάξης για τη χρονική καθυστέρηση στην ανάλυσή μας.

[num,den]=pade(T,n)
 Καθυστέρηση Τάξη προσέγγισης

$$e^{-sT} = 1 - sT + \frac{(sT)^2}{2!} + \dots \approx \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)}$$

Σχήμα 91



liqscr.m

```
%Liquid Control System Analysis
%
num=K*[0.0743 -0.4460 0.8920];d1=[1 1];d2=[30 1];
d3=[1/9 1/3 1];d4=[0.0743 0.4460 0.8920];
den=conv(d1,conv(d2,conv(d3,d4)));
%
w=logspace(-2,1,400);
[mag,phase,w]=bode(num,den,w);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
%
bode(num,den)
title(['Gain Margin=',num2str(Gm),' Phase
Margin=',num2str(Pm)])
```

Παράδειγμα 2ο : Απομακρυσμένος έλεγχος άρματος μάχης
Θεωρήστε το σύστημα έλεγχου ταχύτητας για το απομακρυσμένου
έλεγχου άρματος μάχης (σχήμα 92γ) ,με $G_c=K(s+2)/(s+1)$,
 $G(s)=1/(s^2+2s+4)$, $R(s)$ να είναι η επιθυμητή ταχύτητα και $C(s)$ να
είναι η ταχύτητα. Ο σκοπός σχεδιασμού είναι να πετύχουμε καλό
έλεγχο με μικρό σφάλμα σταθερής κατάστασης και μικρή υπερύψωση
για βηματική είσοδο. Θα φτιάξουμε ένα M-αρχείο το οποίο θα μας
επιτρέπει να παρουσιάζουμε πολλές σχεδιαστικές παραλλαγές
γρήγορα και αποτελεσματικά. Πρώτα, ας κοιτάξουμε τις
προδιαγραφές του σφάλματος σταθερής κατάστασης.

Το σφάλμα σταθερής κατάστασης , e_{ss} , για βηματική είσοδο είναι :

1

Σχήμα 92α

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K/2} .$$

Η επίδραση του κέρδους K στο σφάλμα e_{ss} είναι φανερή. Αν $K=20$,
το σφάλμα είναι 9% του πλάτους εισόδου. Αν $K=10$, το σφάλμα
είναι 17% του πλάτους εισόδου, κ.λ.π.

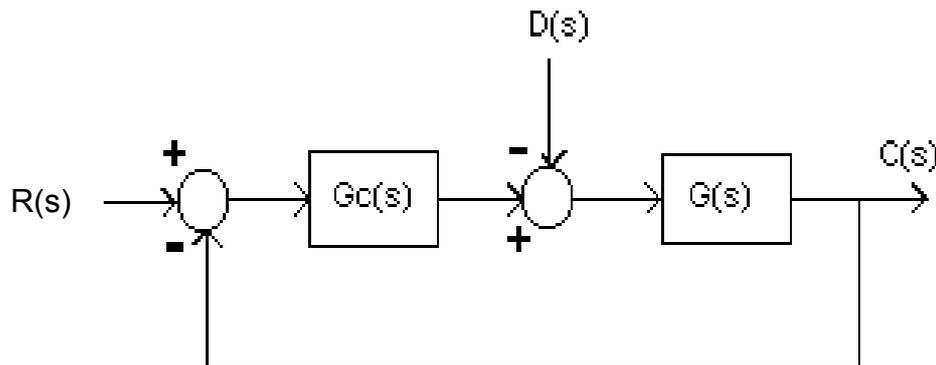
Τώρα θα κοιτάξουμε τις προδιαγραφές της υπερύψωσης στο πεδίο των συχνοτήτων. Υποθέτουμε ότι απαιτούμε το ποσοστό υπερύψωσης να είναι μικρότερο από 50%. Λύνοντας :

$$P.O. \approx 100 \exp^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 50$$

για το ζ δίνει: $\zeta \leq 0.215$.

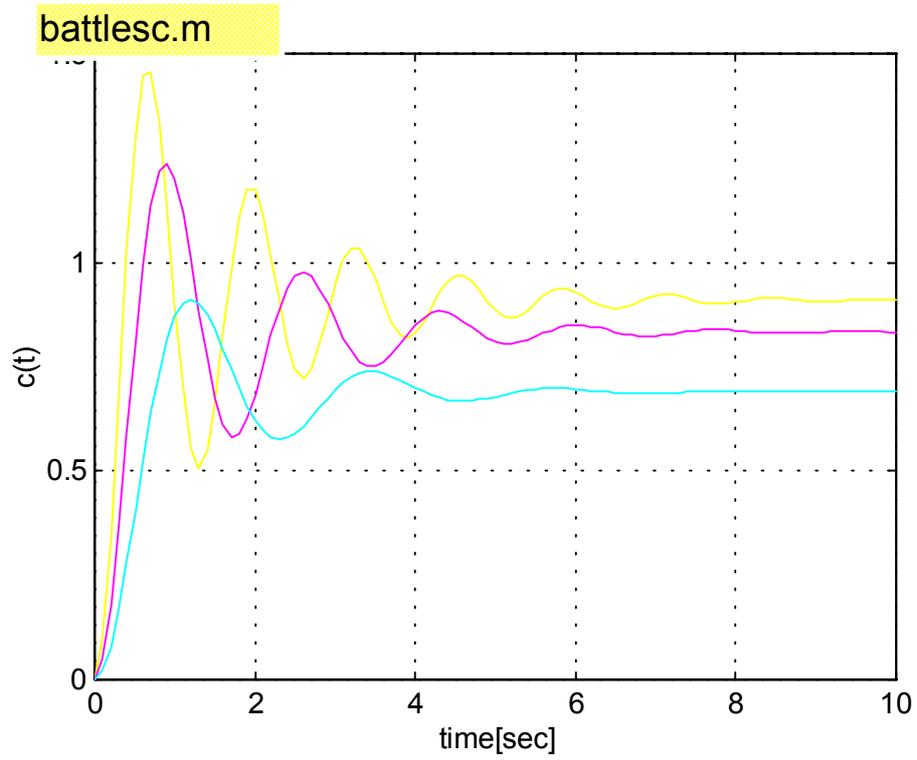
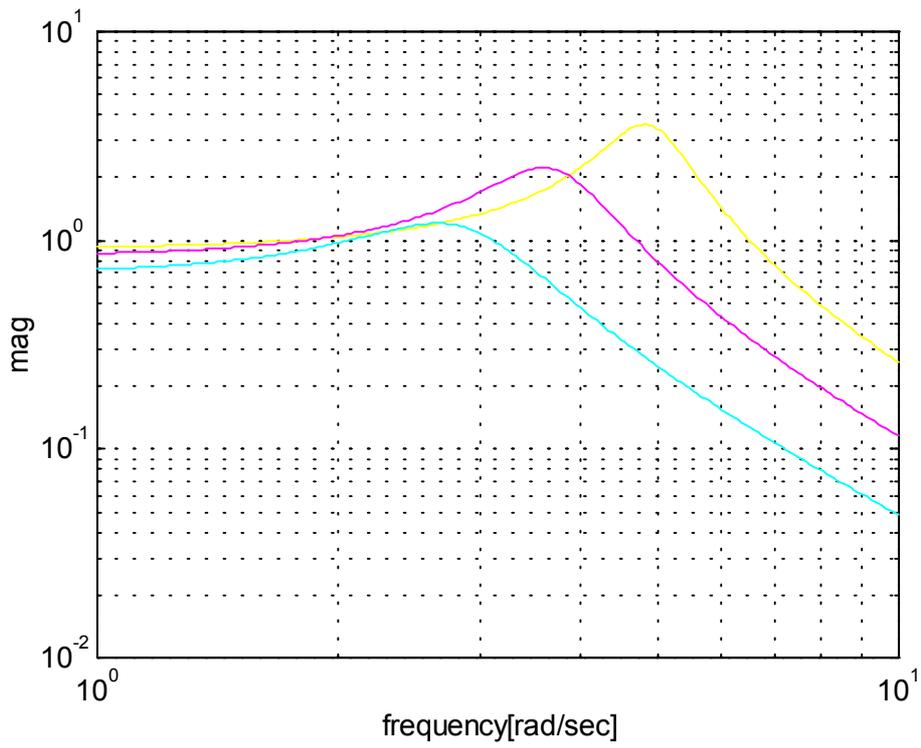
Αν αναφερθούμε στο σχήμα 78 θα βρούμε ότι $M_{p\omega} \leq 2.45$.

Σχήμα 92γ



Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι η πληροφορία του σχήματος 78 είναι για συστήματα δεύτερης τάξης κι εδώ χρησιμοποιείται σαν οδηγό σημείο αναφοράς. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το Bode διάγραμμα κλειστού βρόχου κι ελέγχουμε τις τιμές του $M_{p\omega}$. Οποιοδήποτε κέρδος K για το οποίο $M_{p\omega} \leq 2.45$, μπορεί να είναι αποδεκτό για το σχεδιασμό μας, αλλά πρέπει να ψάξουμε ακόμα τη βηματική απόκριση για να ελέγξουμε την υπερύψωση. Το M -αρχείο του σχήματος 92δ μας βοηθά σε αυτή την εργασία. Μπορούμε να τυπώσουμε τη βηματική απόκριση για να ελέγξουμε την υπερύψωση (σχήμα 92ε).

```
w=logspace(0,1,200);k=20;
%
for i=1:3
    numgc=k*[1 2];dengc=[1 1];
    numg=[1];deng=[1 2 4];
    [nums,dens]=series(numgc,dengc,numg,deng);
    [num,den]=cloop(nums,dens);
    [mag,phase,w]=bode(num,den,w);
    if i==1,mag1=mag;phase1=phase;k=10;end
    if i==2,mag2=mag;phase2=phase;k=4.44;end
    if i==3,mag3=mag;phase3=phase;end
end
%
loglog(w,mag1,'-',w,mag2,'-',w,mag3,'-'),grid
xlabel('frequency[rad/sec]'),ylabel('mag')
```

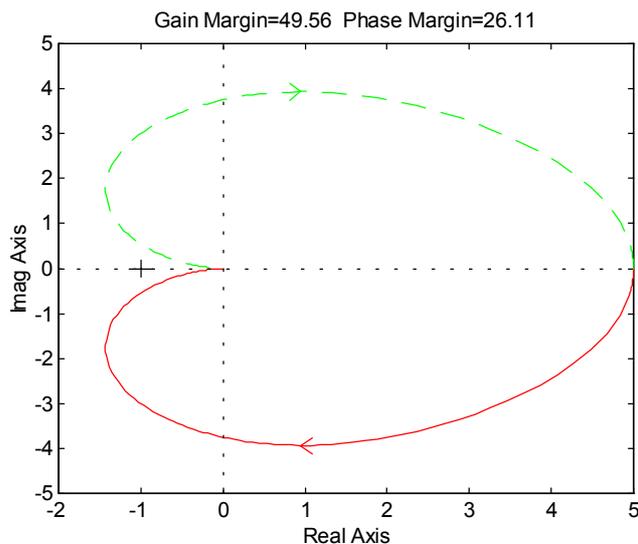


Σχήμα 92δ

battlest.m

```
t=[0:0.1:10];k=20;
%
for i=1:3
    numgc=k*[1 2];dengc=[1 1];
    numg=[1];deng=[1 2 4];
    [nums,dens]=series(numgc,dengc,numg,deng);
    [num,den]=cloop(nums,dens);
    [y,x]=step(num,den,t);
    if i==1,y1=y;k=10;end
    if i==2,y2=y;k=4.44;end
    if i==3,y3=y;end
end
%
plot(t,y1,'-',t,y2,'-',t,y3,'-'),grid
xlabel('time[sec]'),ylabel('c(t)')
```

Τα αποτελέσματα της Σχήμα 92ε ανάλυσης συνοψίζονται στον πίνακα 8, για $K=20, 10$ και 4.44 . Υποθέστε ότι επιλέγουμε $K=10$ ως κέρδος για το σχεδιασμό μας. Παίρνουμε επομένως το διάγραμμα Nyquist και ελέγχουμε τη σχετική ευστάθεια (σχήμα 92ζ). Το περιθώριο κέρδους είναι $GM=49.56$ και το περιθώριο φάσης είναι $PM=26.11^\circ$.



Σχήμα 92ζ

battleny.m

```
%Remotely Controlled Battlefield Vehicle
%Nyquist plot for k=10
%
numgc=10*[1 2];dengc=[1 1];
numg=[1];deng=[1 2 4];
[num,den]=series(numgc,dengc,numg,deng);
%
[mag,phase,w]=bode(num,den);
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(mag,phase,w);
%
nyquist(num,den);
title(['Gain Margin=',num2str(Gm),' Phase Margin=',num2str(Pm)])
```

Πίνακας 8

| | | | |
|----------------------|------|-----|-----|
| Κ | 4.44 | 10 | 20 |
| ποσοστό υπερέψωσης | 5% | 30% | 50% |
| χρόνος αποκατάστασης | 3.5 | 5 | 6 |
| χρόνος κορυφής | 1.4 | 1.0 | 0.7 |
| ϵ_{ss} | 31% | 17% | 9% |

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

1. Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια θεωρήσαμε το σχεδιασμό και την ανάλυση των συστημάτων ελέγχου στο πεδίο των συχνοτήτων. Χρησιμοποιήσαμε το μετασχηματισμό Laplace για να μετατρέψουμε το γραμμικό μοντέλο με διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, σε μία αλγεβρική έκφραση με όρους της μιγαδικής μεταβλητής s . Μετά μελετάμε την είσοδο-έξοδο του συστήματός μας (ή τη συνάρτηση μεταφοράς) που έχει την εξής μορφή :

$$C(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} R(s) = G(s)R(s) .$$

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχίζουμε να κοιτάμε το σχεδιασμό και την ανάλυση των συστημάτων ελέγχου στο πεδίο του χρόνου. Σε αντίθεση με τη προσέγγιση στο πεδίο των συχνοτήτων, οι μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιούν και αναπαράσταση εξισώσεων-κατάστασης για το μοντέλο του συστήματος, που δίνεται από :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \quad (\text{εξ.10}) \\ c &= Dx + Hu \end{aligned}$$

Ο βέκτορας x είναι η κατάσταση του συστήματος, A είναι η σταθερή $n \times n$ μήτρα του συστήματος, B είναι η σταθερή $n \times m$ μήτρα εισόδου, D είναι η σταθερή $r \times n$ μήτρα εξόδου και H είναι η σταθερή $r \times m$ μήτρα. Ο αριθμός εισόδων m και ο αριθμός εξόδων r παίρνονται ως ένα, εφόσον θεωρούμε προβλήματα με μία μόνο είσοδο και μία έξοδο.

Τα κύρια στοιχεία της αναπαράστασης με εξισώσεις κατάστασης είναι ο βέκτορας κατάστασης x και οι σταθερές μήτρες (A , B , D , H).

Οι νέες συναρτήσεις που καλύπτονται από αυτό το κεφάλαιο είναι οι $tf2ss$ και $ss2tf$. Οι πιο πολλές συναρτήσεις που καλύφθηκαν από προηγούμενα κεφάλαια εμφανίζονται ξανά, όπως η συνάρτηση $bode$ η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μοντέλα σταθερής κατάστασης (σχήμα 93).

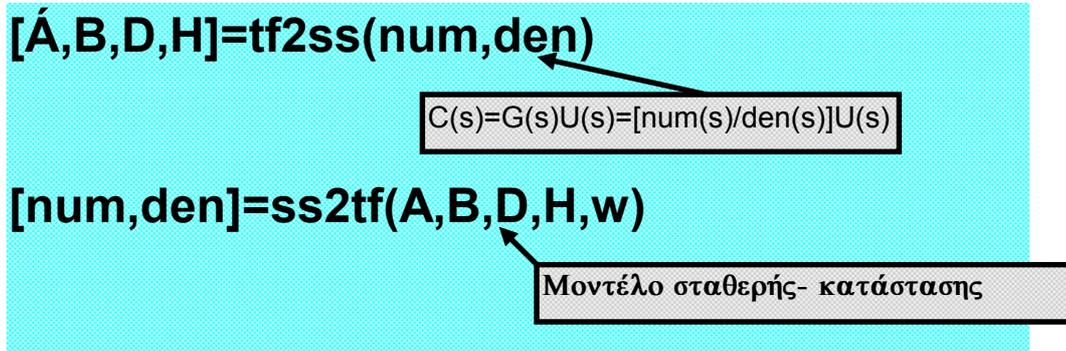
[mag,phase,w]=bode(A,B,D,H,w)

Σχήμα 93

2. Συσχετίσεις

μοντέλων

Από μία δοθείσα συνάρτηση μεταφοράς μπορούμε να πάρουμε μία ισοδύναμη αναπαράσταση εξισώσεων-κατάστασης, και αντίστροφα. Το MATLAB έχει δύο συναρτήσεις που μετατρέπουν τα συστήματα από μορφή συνάρτησης μεταφοράς σε μορφή εξισώσεων-κατάστασης. Η συνάρτηση tf2ss κάνει αυτή τη δουλειά, ενώ η συνάρτηση ss2tf κάνει ακριβώς την αντίστροφη δουλειά (σχήμα 94).



Σχήμα 94

Για παράδειγμα θεωρήστε το σύστημα τρίτης τάξης :

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6} \quad (\text{εξίσωση 11}) .$$

Μπορούμε να πάρουμε μία αναπαράσταση εξισώσεων κατάστασης χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση tf2ss (σχήμα 95). Αυτή της εξίσωσης 11 παίρνεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του σχήματος 93, όπου :

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ και}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}, H = [0] .$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση printsys εμφανίζει τις μήτρες του συστήματος ως a,b,c,d. Η αντιστοιχία με τις δικές μας έννοιες είναι η εξής :

$$a \rightarrow A, \quad b \rightarrow B, \quad c \rightarrow D, \quad d \rightarrow H .$$

convert.m

```

%Convert G(s)=(2s^2+8s+6)/(s^3+8s^2+16s+6)
%to a state-space representation
%
num=[2 8 6];den=[1 8 16 6];
[A,B,D,H]=tf2ss(num,den);
printsys(A,B,D,H)

```

» convert

a = παίρνουμε σαν έξοδο

| | x1 | x2 | x3 |
|----|----------|-----------|----------|
| x1 | -8.00000 | -16.00000 | -6.00000 |
| x2 | 1.00000 | 0 | 0 |
| x3 | 0 | 1.00000 | 0 |

b =

| | u1 |
|----|---------|
| x1 | 1.00000 |
| x2 | 0 |
| x3 | 0 |

c =

| | x1 | x2 | x3 |
|----|---------|---------|---------|
| y1 | 2.00000 | 8.00000 | 6.00000 |

d =

| | u1 |
|----|----|
| y1 | 0 |

Σχήμα 95

3. Ευστάθεια των συστημάτων στο πεδίο του χρόνου

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα με τη μορφή εξισώσεων κατάστασης όπως στις εξισώσεις 10. Η σταθερότητα του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί με τη χαρακτηριστική εξίσωση που σχετίζεται με τη μήτρα συστήματος A. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η :

$$\det(sI-A)=0 \text{ (εξίσωση 12) .}$$

Βλέπουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ένα πολυώνυμο στο s . Αν όλες οι ρίζες της έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη (δηλ., $\text{Re}(s_i) < 0, \forall i$), τότε το σύστημα είναι σταθερό.

Όταν το μοντέλο του συστήματος δίνεται σε μορφή εξισώσεων κατάστασης πρέπει να υπολογιστεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που σχετίζεται με τη μήτρα A . Από αυτή την άποψη έχουμε πολλές επιλογές. Μπορούμε να υπολογίσουμε την εξίσωση 12 απευθείας μόνοι μας υπολογίζοντας την αντίστοιχη ορίζουσα. Μετά υπολογίζουμε τις ρίζες χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `roots` για να ελέγξει την ευστάθεια, ή εναλλακτικά, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Routh-Hurwitz για να βρούμε κάποιες ασταθείς ρίζες. Δυστυχώς, οι υπολογισμοί με το χέρι μπορεί να είναι πολλοί, ειδικά αν η διαστάσεις του A είναι μεγάλες. Επειδή θέλουμε να αποφύγουμε αυτούς τους υπολογισμούς αν είναι δυνατό, στρεφόμεστε στο MATLAB, το οποίο μπορεί να μας βοηθήσει σε αυτή τη προσπάθεια. Η συνάρτηση `poly` μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό της χαρακτηριστικής εξίσωσης που σχετίζεται με το A . Υπενθυμίζουμε ότι η `poly` χρησιμοποιείται για το σχηματισμό πολυωνύμου από ένα βέκτορα ριζών. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα για τον υπολογισμό της χαρακτηριστικής εξίσωσης του A , όπως δείχνεται στο σχήμα 96, στο οποίο η μήτρα A , είναι :

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -16 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και το συσχετιζόμενο χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το :
 $s^3 + 8s^2 + 16s + 6$

Εάν A είναι μία $n \times n$ μήτρα, `poly(A)` είναι η χαρακτηριστική εξίσωση που αναπαρίσταται από ένα βέκτορα γραμμής $n+1$ στοιχείων, τα στοιχεία του οποίου είναι οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

```

» A=[-8 -16 -6;1 0 0;0 1 0];
» p=poly(A)

p =

    1.0000    8.0000   16.0000    6.0000

» roots(p)

ans =

   -5.0861
   -2.4280
   -0.4859
    
```

ευσταθές σύστημα

Σχήμα 96

Παράδειγμα: Αυτόματο σύστημα ελέγχου

Η αναπαράσταση σταθερής κατάστασης του συστήματος αυτομάτου ελέγχου είναι η :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{εξίσωση 13})$$

όπου :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}.$$

Οι προδιαγραφές σχεδιασμού είναι (i) βηματική απόκριση με χρόνο αποκατάστασης μικρότερο από 2 seconds, και (ii) υπερύψωση μικρότερη από 4%. Υποθέτουμε ότι οι μεταβλητές κατάστασης είναι διαθέσιμες για ανατροφοδότηση, έτσι ώστε ο έλεγχος να δίνεται από :

$$u = (-K_1, -K_2, -K_3)x \quad (\text{εξίσωση 14}).$$

Πρέπει να επιλέξουμε τα κέρδη $K_1, K_2,$ και K_3 ώστε να εκπληρούν τις προδιαγραφές παρουσίασης. Χρησιμοποιώντας τη προσέγγιση σχεδιασμού :

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} < 2 \quad \text{και} \quad P.O. \approx 100 \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) < 4,$$

βρίσκουμε ότι :

$$\zeta > 0.72 \quad \text{και} \quad \omega_n > 2.8.$$

Αυτό ορίζει μία περιοχή στο μιγαδικό επίπεδο στην οποία οι υπερισχύουσες ρίζες θα πρέπει να βρίσκονται εκεί όπου εκπληρούνται οι προδιαγραφές σχεδιασμού. Αντικαθιστώντας την εξίσωση 14 στην εξίσωση 13 παίρνουμε :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -KK_1 & -KK_2 & -(5+KK_3) \end{bmatrix} x = A^* x \quad (\text{εξίσωση 15}),$$

όπου A^* είναι η αναταξιασμένη μήτρα A . Η χαρακτηριστική εξίσωση που σχετίζεται με την εξίσωση 15, μπορεί να βγει υπολογίζοντας την $\det(sI - A^*) = 0$. Σαν αποτέλεσμα παίρνουμε :

$$s(s+1)(s+5) + KK_3 \left(s^2 + \frac{K_3+K_2}{K_3}s + \frac{K_1}{K_3} \right) = 0 \quad (\text{εξίσωση 16}).$$

Αν δούμε το KK_3 σαν παράμετρο και θέσουμε $K_1=1$, τότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση 16 ως εξής :

$$1 + KK_3 \frac{s^2 + ((K_3+K_2)/K_3)s + 1/K_3}{s(s+1)(s+5)} = 0.$$

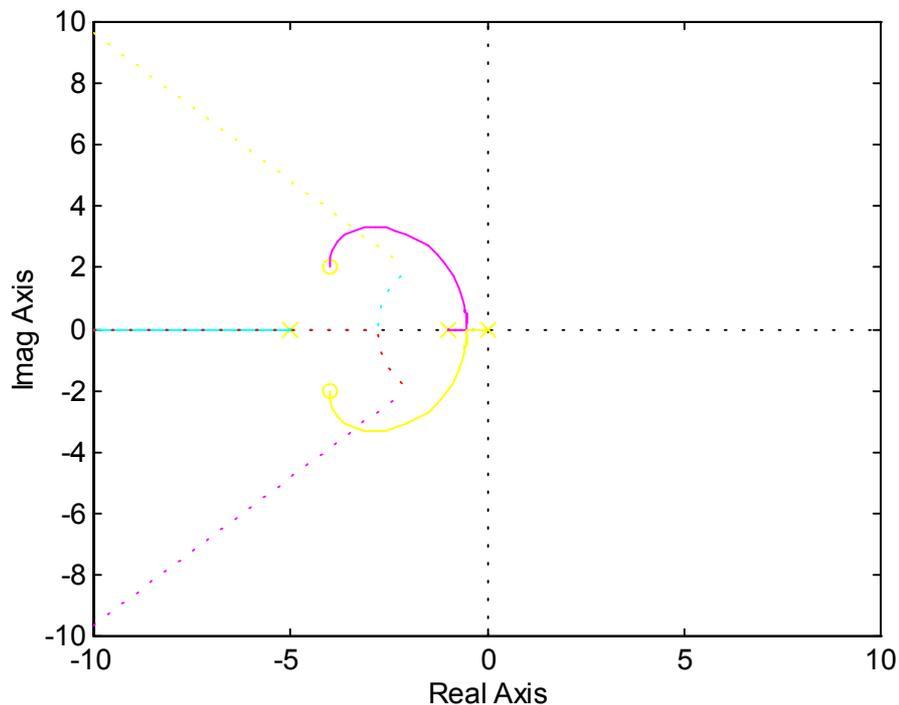
Θέτουμε τα μηδενικά στο $s=-4\pm 2j$ για να τραβήξουμε το τόπο προς τα αριστερά του s -επιπέδου. Έτσι το επιθυμητό πολυώνυμο του αριθμητή είναι το : $s^2+8s+20$. Συγκρίνοντας αντίστοιχους συντελεστές οδηγούμαστε στα :

$$\frac{K_3+K_2}{K_3} = 8 \quad \text{και} \quad \frac{1}{K_3} = 20 .$$

Επομένως $K_2=0.35$ και $K_3=0.05$. Τώρα μπορούμε να σχεδιάσουμε τον τόπο ριζών έχοντας το KK_3 σαν παράμετρο (σχήμα 97). Η χαρακτηριστική εξίσωση, εξίσωση 16, είναι :

$$1 + KK_3 \frac{s^2+8s+20}{s(s+1)(s+5)} = 0 .$$

Το επιλεγόμενο κέρδος $KK_3=12$, βρίσκεται στη περιοχή παρουσίας (σχήμα 97). Η συνάρτηση `locfind` χρησιμοποιείται για να προσδιορίσει τη τιμή του KK_3 στο επιλεγόμενο σημείο. Τα τελικά κέρδη είναι : $K=240.00, K_1=1.00, K_2=0.35, K_3=0.05$.



autolocu.m

```
%Root locus script for the Automatic Test System
%including performance specs regions
num=[1 8 20];den=[1 6 5 0];
clg;rlocus(num,den);hold on
%
zeta=0.72;wn=2.8;
x=[-10:0.1:-zeta*wn];y=-(sqrt(1-zeta^2)/zeta)*x;
xc=[-10:0.1:-zeta*wn];c=sqrt(wn^2-xc.^2);
plot(x,y,'-',x,-y,'-',xc,c,'-',xc,-c,'-')
%plot(xc,c,'-',xc,-c,'-')
```

Σχήμα 97

4. Χρονική απόκριση

Η χρονική απόκριση του συστήματος με εξισώσεις τις εξισώσεις 10 δίνεται από τη λύση της ανυσματικής διαφορικής εξίσωσης :

$$x(t)=\exp(At)x(0)+\int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau \text{ (εξίσωση 17).}$$

Η μήτρα εκθετικής συνάρτησης στην εξίσωση 17 ,είναι η μήτρα μεταβατικής απόκρισης, $\varphi(t)$, όπου :

$$\varphi(t)=\exp(At) .$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση \expm για να υπολογίσουμε τη μεταβατική μήτρα για ένα δοθέν χρόνο dt (σχήμα 98). Η συνάρτηση $\expm(A)$ υπολογίζει το εκθετικό της μήτρας A , δοθέντος ότι η συνάρτηση $\exp(A)$ επιστρέφει το $e^{a_{ij}}$ για κάθε στοιχείο a_{ij} που ανήκει στην A .

Η χρονική απόκριση του συστήματος στην εξίσωση 10 μπορεί να παρθεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $lsim$. Η συνάρτηση $lsim$ δέχεται σαν είσοδο μη μηδενικές αρχικές συνθήκες καθώς και μία συνάρτηση εισόδου. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 99 για ένα RLC δικτύωμα, το οποίο περιγράφεται με την εξής αναπαράσταση σταθερής κατάστασης :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, D = [1 \ 0], \text{ και } H = 0.$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι $x_1(0)=x_2(0)=1$ και η είσοδος $u(t)=0$. Αν μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τη συνάρτηση `lsim` και από το πολλαπλασιασμό του βέκτορα αρχικών συνθηκών με τη μήτρα μεταβατικής κατάστασης, βρίσκουμε τα ίδια αποτελέσματα ακριβώς. Για $t=0.2$ η μήτρα μεταβατικής κατάστασης δίνεται στο σχήμα 98. Η κατάσταση για $t=0.2$ προβλέπεται από τις μεθόδους μεταβατικής κατάστασης να είναι :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t=0.2} = \begin{bmatrix} 0.9671 & -0.2968 \\ 0.1484 & 0.5219 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} 0.6705 \\ 0.6705 \end{bmatrix}$$

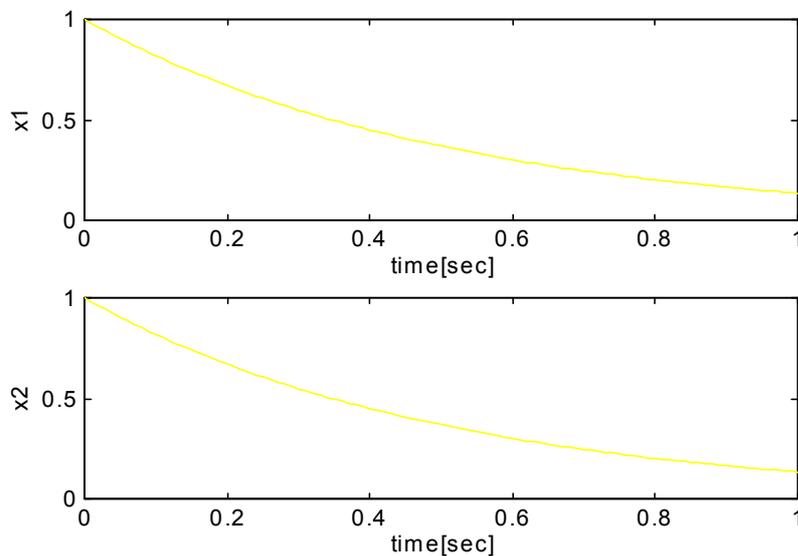
Η κατάσταση στο $t=0.2$ μπορεί επίσης να προβλεφτεί με τη συνάρτηση `lsim` να είναι $x_1(0.2)=x_2(0.2)=0.6703$.

```
» A=[0 -2;1 -3];dt=0.2;Phi=expm(A*dt)

Phi =

    0.9671   -0.2968
    0.1484    0.5219
```

Σχήμα 98



timeresp.m

```
A=[0 -2;1 -3];
B=[2;0];
D=[1 0];
H=[0];
x0=[1 1];
t=[0:0.01:1];
u=0*t;
[y,x]=lsim(A,B,D,H,u,t,x0);
subplot(211),plot(t,x(:,1))
xlabel('time[sec]'),ylabel('x1')
subplot(212),plot(t,x(:,2))
xlabel('time[sec]'),ylabel('x2')
```