

Κεφάλαιο 11

Ανάλυση Nyquist

Λυμένα Προβλήματα

11.1 Ευστάθεια Nyquist για ένα σύστημα διακριτού χρόνου

(Παραδείγματα 11.11 και 11.14)

11.2 Ευστάθεια Nyquist για ένα συνεχές σύστημα

(Προβλήματα 11.43 και 11.55)

11.3 Σχετική Ευστάθεια

(Πρόβλημα 11.59)

11.4 Ευστάθεια Nyquist για ένα σύστημα διακριτού χρόνου II

(Πρόβλημα 11.67)

11.5 Ανάλυση Nyquist για συστήματα χρονικής καθυστέρησης

(Πρόβλημα 11.80)

Η ανάλυση Nyquist, μια μέθοδος απόκρισης συχνότητας, είναι ουσιαστικά μια γραφική διαδικασία δια τον προσδιορισμό απόλυτης και σχετικής ευστάθειας για συστήματα ελέγχου κλειστού βρόχου. Πληροφορίες για την ευστάθεια είναι διαθέσιμες απευθείας από το γράφημα μιας συνάρτησης απόκρισης συχνότητας ανοικτού βρόχου $\mathbf{GH}(\omega)$, αφού το σύστημα ανατροφοδότησης είναι σε κανονική μορφή. (**Κεφάλαιο 7**).

Η ανάλυση Nyquist χρησιμοποιείται για τον καθορισμό πληροφοριών σχετικά με την ευστάθεια του συστήματος. Οι μέθοδοι του **Κεφαλαίου 5** είναι συνήθως ανεπαρκείς. Πιο πολύ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό απόλυτης ευστάθειας και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συστήματα των οποίων η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ένα πεπερασμένο πολυώνυμο με όρους των \mathbf{s} ή \mathbf{z} .

Η ανάλυση Nyquist είναι συνήθως χρήσιμη μόνο όταν εμπειρικές μετρήσεις είναι διαθέσιμες ή όταν φυσικά συστήματα είναι να εξεταστούν πειραματικά αφού αυτή η τεχνική απαιτεί μόνο την έξοδο από μια συνάρτηση μεταφοράς και όχι την αναλυτική μορφή.

Τυπώνοντας μιγαδικές συναρτήσεις μιγαδικής μεταβλητής.

Μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής σχεδιάζεται εύκολα σε γράφημα σε ένα απλό σετ από άξονες συντεταγμένων. Μια μιγαδική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής, όπως συναρτήσεις μεταφοράς της μορφής $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ με $\mathbf{s} = \sigma + \mathbf{j}\omega$ δεν μπορούν να παρασταθούν γραφικά σε απλό σετ από συντεταγμένες, αφού το σ και το ω διαφοροποιούνται ανεξάρτητα, και αφού το $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ θα έχει και πραγματικό και φανταστικό μέρος.

Τα διαγράμματα Nyquist επιλύουν αυτό το πρόβλημα με το διάγραμμα της τιμής του $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ σε ένα ζεύγος αξόνων που ανταποκρίνονται στις πραγματικές και τις φανταστικές τιμές της συνάρτησης. Ένας τόπος σημείων σχεδιάζεται με την εύρεση της τιμής του $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ σε διαφορετικές τιμές του \mathbf{s} . Η διαδρομή που μας ενδιαφέρει είναι η ειδική περίπτωση του $\sigma = 0$, $\mathbf{s} = \mathbf{j}\omega$. Ο τόπος των σημείων που σχεδιάζεται με διάφορες τιμές του ω είναι γνωστός ως διαδρομή Nyquist.

Ένα διάγραμμα σε πολικές συντεταγμένες του $\mathbf{P}(\mathbf{j}\omega)$ είναι ένα γράφημα του $\mathbf{Im}(\mathbf{P}(\mathbf{j}\omega))$ κατά του $\mathbf{Re}(\mathbf{P}(\mathbf{j}\omega))$ στο πεπερασμένο μέρος του πεδίου \mathbf{P} για $-\infty < \omega < +\infty$. Στα ξεχωριστά σημάια του $\mathbf{P}(\mathbf{j}\omega)$ (πόλοι στον άξονα $\mathbf{j}\omega$), το $|\mathbf{P}(\mathbf{j}\omega)|$ τείνει στο ∞ .

Σημειώστε ότι είναι διαφορετικό από το επίπεδο s (**Κεφάλαιο 4**) στο οποίο τυπώνουμε το πραγματικό εναντίον του φανταστικού μέρους της συχνότητας.

Οι ακόλουθοι ορισμοί απαιτούνται για την ανάλυση των διαγραμμάτων Nyquist.

Αναλυτική Συνάρτηση

Αν η παράγωγος του P στο s_0 ορίζεται από

$$\left. \frac{dP}{ds} \right|_{s=s_0} \equiv \lim_{s \rightarrow s_0} \left\{ \frac{P(s) - P(s_0)}{s - s_0} \right\}$$

Υπάρχει σε όλα τα σημεία σε μια περιοχή του επιπέδου s , έτσι ώστε, αν το όριο είναι πεπερασμένο και μοναδικό, τότε το P είναι αναλυτικό σε αυτή την περιοχή. Ο ίδιος ορισμός ισχύει για συναρτήσεις διακριτού χρόνου, με το z να αντικαθιστά το s .

Οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι αναλυτικές στο πεπερασμένο s ή z επίπεδο εκτός από τους πόλους του P .

Μοναδικότητα ή μοναδικό σημείο (Singularity or Singular Point)

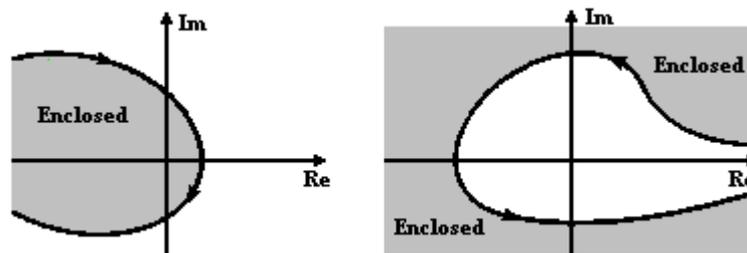
Ένα σημείο στο οποίο η P δεν είναι αναλυτική. Οι πόλοι θεωρούνται μοναδικά σημεία.

Κλειστό περίγραμμα (Closed Contour)

Μια συνεχής καμπύλη σε ένα μιγαδικό επίπεδο το οποίο αρχίζει και τελειώνει στο ίδιο σημείο.

Εσώκλειστα σημεία (Enclosed)

Όλα τα σημεία στα δεξιά ενός περιγράμματος όπως διέρχεται σε μια καθορισμένη κατεύθυνση λέγεται ότι είναι εσώκλειστα από αυτό.



Θετική Κατεύθυνση (Positive Direction)

Μια διαδρομή με δεξιόστροφη φορά (**clockwise**) γύρω από το περίγραμμα.

Θετική Περικύκλωση (Positive Encirclement)

Ένα κλειστό περίγραμμα στο επίπεδο P καλείται για να κάνει n θετικές περικυκλώσεις της αρχής μιας περιφερειακής γραμμής που σχηματίζεται από την αρχή σε ένα σημείο στην P καμπύλη και περιστρέφεται με μια δεξιόστροφη κατεύθυνση σε $360n$ μοίρες διαμέσου της κλειστής διαδρομής. Αν η διαδρομή είναι διαμέσου αριστερόστροφης κατεύθυνσης, τότε πετυχαίνεται αρνητική περικύκλωση.

Ο ολικός αριθμός των περικυκλώσεων, N_0 , είναι ίσος με τον θετικό μείων τον αρνητικό.

Ιδιότητες της χαρτογράφησης (Properties of the Mapping)

Όλες οι χαρτογραφήσεις, P , θεωρούνται σε αυτό το κεφάλαιο ότι έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες, οι οποίες είναι απαραίτητες στην ερμηνεία των πόλων.

1. Η P είναι μια συνάρτηση μιας τιμής. Δηλαδή, κάθε σημείο στο επίπεδο s (ή z) χαρτογραφείται σε ένα και μόνο σημείο στο επίπεδο P .
2. Τα περιγράμματα στο s αποφεύγουν μοναδικά σημεία του P .
3. Το P είναι αναλυτικό εκτός πιθανόν σε πεπερασμένο αριθμό σημείων στο επίπεδο s (ή z).
4. Κάθε κλειστό περίγραμμα στο επίπεδο s (ή z) χαρτογραφείται σε ένα κλειστό περίγραμμα στο επίπεδο P .
5. Το P είναι μια σύμφωνη χαρτογράφηση. Αυτό σημαίνει ότι η κατεύθυνση της γωνίας μεταξύ δυο οποιονδήποτε τεμνομένων καμπυλών στο σημείο της τομής τους στο επίπεδο s (ή z) διατηρούνται από την χαρτογράφηση αυτών των καμπυλών στο επίπεδο P .
6. Η χαρτογράφηση P υπακούει στην αρχή των ορισμάτων, δηλ., ο ολικός αριθμός των περικυκλώσεων N_0 είναι ίσος με τα μηδενικά Z_0 μείων τον αριθμό των πόλων P_0 του P που περιέχεται στο επίπεδο s (ή z). Έτσι

$$N_0 = Z_0 - P_0 \quad (11.1)$$

7. Αν η αρχή των αξόνων περικλείεται από το περίγραμμα P , τότε $N_0 > 0$. Αν η αρχή των αξόνων δεν περικλείεται από το περίγραμμα του P , τότε $N_0 \leq 0$.

Πολικά Διαγράμματα (Polar Plots)

Μια συνάρτηση μεταφοράς $P(s)$ συνεχούς συστήματος μπορεί να αναπαρασταθεί στο πεδίο συχνοτήτων σαν μια ημιτονοειδής συνάρτηση μεταφοράς με το αντικαταστήσουμε το $j\omega$ αντί του s στην έκφραση του $P(s)$. Το εξαγόμενο $P(j\omega)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση της απλής μεταβλητής ω . Εντούτοις, μπορεί να σχεδιαστεί γραφικά σε δύο διαστάσεις, με το ω σαν παράμετρο, και γραμμένο με τις ισοδύναμες μορφές:

$$\text{Πολική μορφή: } P(j\omega) = |P(j\omega)| \angle \phi(\omega) \quad (11.2)$$

$$\text{Μορφή Euler : } P(j\omega) = |P(j\omega)| (\cos \phi(\omega) + j \sin \phi(\omega)) \quad (11.3)$$

Το $|P(j\omega)|$ είναι το μέτρο της μιγαδικής συνάρτησης $P(j\omega)$ και $\phi(j\omega)$ είναι η γωνία φάσης. Στο **Mathcad**, είναι εύκολο να εφαρμόσουμε την πολική μορφή σαν

$$P(j \cdot \omega) = |P(j \cdot \omega)| \cdot \exp(j \cdot \arg(P(j \cdot \omega))) \quad (11.2)$$

και η Euler, σαν

$$P(j\omega) = \text{Re}(P(j \cdot \omega)) + j \cdot \text{Im}(P(j \cdot \omega)) \quad (11.3)$$

Ιδιότητες των πολικών διαγραμμάτων

Οι ακόλουθες ιδιότητες είναι χρήσιμες για τα πολικά διαγράμματα του $P(\omega)$:

1.) Το πολικό διάγραμμα για το $P(\omega) + A$, όπου A είναι μια οποιοδήποτε μιγαδική σταθερά, είναι ίδιο με το διάγραμμα για το $P(\omega)$ με την αρχή των αξόνων μετατοπισμένη στο σημείο $-A$, που ισούται με $-(\text{Re}A + j\text{Im}A)$.

2.) Το πολικό διάγραμμα της συνάρτησης μεταφοράς ενός χρονικά σταθερού γραμμικού συστήματος παρουσιάζει συμμετρία σύζευξης. Δηλαδή, το γράφημα για $-\infty < \omega < 0$ είναι το ίδιο περί τον οριζόντιο άξονα με το γράφημα για $0 \leq \omega < +\infty$.

3.) Το πολικό διάγραμμα μπορεί να κατασκευαστεί απευθείας από το διάγραμμα Bode (**Κεφάλαιο 15**), αν είναι διαθέσιμο. Οι τιμές του μέτρου και της γωνίας φάσης σε διάφορες συχνότητες ω στο διάγραμμα Bode αναπαριστούν σημεία διαμέσου του τύπου του πολικού διαγράμματος.

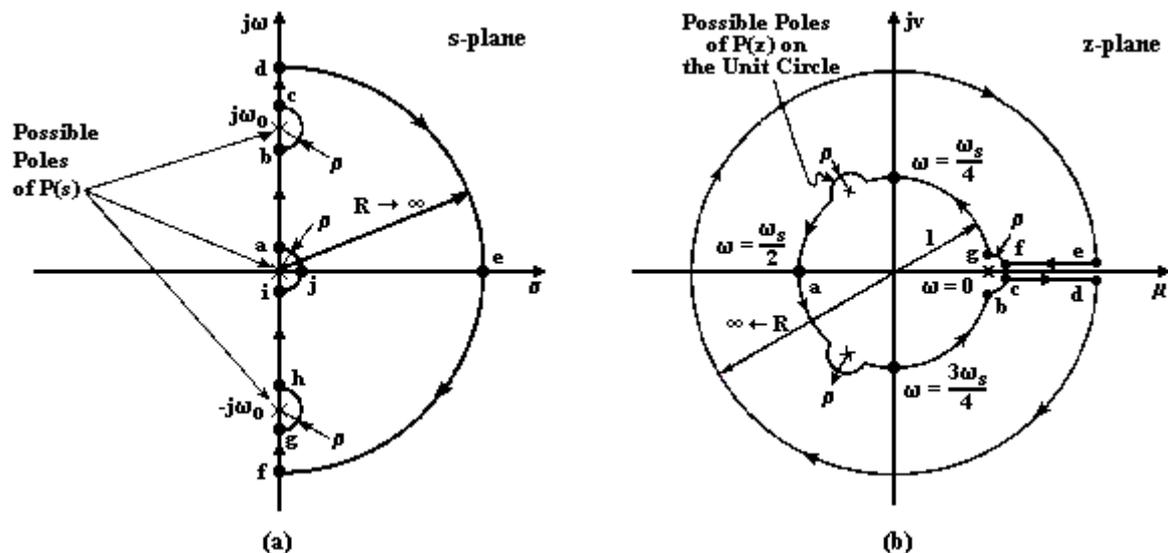
4.) Σταθερές αυξήσεις της συχνότητας δεν ξεχωρίζονται από ίσα διαστήματα διαμέσου του πολικού διαγράμματος.

Η διαδρομή Nyquist

Για τα συνεχή συστήματα, η διαδρομή **Nyquist** είναι ένα κλειστό περίγραμμα στο επίπεδο s , που περικλείει ολόκληρο το δεξιό μισό του επιπέδου s (RHP). Για συστήματα διακριτού χρόνου, η σχετική διαδρομή Nyquist περικλείει ολόκληρο το επίπεδο z έξω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Για συνεχή συστήματα, έτσι ώστε η διαδρομή Nyquist δεν πρέπει να περνάει από οποιοδήποτε πόλο του $P(s)$, μικρά ημικύκλια διαμέσου του φανταστικού άξονα στην αρχή των αξόνων του $P(s)$ απαιτούνται στην διαδρομή αν το $P(s)$ έχει πόλους στον άξονα $j\omega$ ή στην αρχή των αξόνων.

Για να περιορίσουμε την RHP στο άπειρο, και έτσι όλους τους πόλους στο εσωτερικό του RHP, μια μεγάλη ημικυκλική διαδρομή σχεδιάζεται στο RHP και η ακτίνα R αυτού του ημικυκλίου ερμηνεύεται σαν να είναι άπειρη στο όριο. Οι γενικές διαδρομές Nyquist στο επίπεδο s και z φαίνονται στα δύο παρακάτω σχήματα.



Γενικευμένη διαδρομή Nyquist σε (α) επίπεδο s , (β) επίπεδο z .

Τα διάφορα τμήματα της διαδρομής Nyquist στο (α) μπορούν να περιγραφούν αναλυτικά με τον ακόλουθο τρόπο, όταν το ω_0 είναι ένας πιθανός πόλος του συστήματος:

\overline{ab} :	$s=j \cdot \omega$	$0 < \omega < \omega_0$
\overline{bc} :	$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (j \cdot \omega_0 + \rho \cdot e^{j \cdot \theta})$	$-90 \cdot \text{deg} \leq \theta \leq 90 \cdot \text{deg}$
\overline{cd} :	$s=j \cdot \omega$	$\omega_0 \leq \omega < \infty$
\overline{def} :	$s = \lim_{R \rightarrow \infty} (R \cdot e^{j \cdot \theta})$	$90 \cdot \text{deg} \leq \theta \leq -90 \cdot \text{deg}$
\overline{fg} :	$s=j \cdot \omega$	$-\infty < \omega < -\omega_0$
\overline{gh} :	$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (-j \cdot \omega_0 + \rho \cdot e^{j \cdot \theta})$	$-90 \cdot \text{deg} \leq \theta \leq 90 \cdot \text{deg}$
\overline{hi} :	$s=j \cdot \omega$	$-\omega_0 < \omega < 0$
\overline{ija} :	$s = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho \cdot e^{j \cdot \theta})$	$-90 \cdot \text{deg} \leq \theta \leq 90 \cdot \text{deg}$

Το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist

Το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist, μια προέκταση του πολικού διαγράμματος, είναι μια χαρτογράφηση ολόκληρης της διαδρομής Nyquist στο επίπεδο P . Είναι κατασκευασμένο χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες χαρτογράφησης που δείχθηκαν από πάνω. Στο **Mathcad**, τα πραγματικά και τα φανταστικά τμήματα των συναρτήσεων μεταφοράς μπορούν να τυπωθούν απευθείας, έτσι τα διαγράμματα Nyquist δημιουργούνται με ευκολία. Αν χρησιμοποιείτε **Mathcad 4.0** ή παραπάνω, ή το **Mathcad Engine**, μπορείτε επίσης να τυπώσετε (διάγραμμα) τα πολικά διαγράμματα, χρησιμοποιώντας τον τύπο Euler του P .

Κριτήριο ευστάθειας Nyquist

Ένα γραμμικό συνεχές σύστημα κλειστού βρόχου είναι απολύτως σταθερό αν οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. (**Κεφάλαιο 5**). Ισοδύναμως, οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου (ή τα μηδενικά του παρανομαστή, $1 + GH(s)$) πρέπει να βρίσκονται στο αριστερό μέρος του πεδίου. Για συνεχή συστήματα, το κριτήριο ευστάθειας **Nyquist** εγκαθιστά τον αριθμό των μηδενικών του $1 + GH(s)$ στο δεξιό μέρος του πεδίου από το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist του $GH(s)$. Για συστήματα ελέγχου διακριτού χρόνου, το κριτήριο ευστάθειας Nyquist εγκαθιστά τον αριθμό των μηδενικών του $1 + GH(z)$ έξω από τον μοναδιαίο κύκλο του επιπέδου z , την περιοχή της ευστάθειας για διακριτά συστήματα.

Για οποιοδήποτε τύπο συστήματος, συνεχούς ή διακριτού χρόνου, το κριτήριο ευστάθειας Nyquist μπορεί να δηλωθεί ως εξής:

Το σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι **GH** είναι ευσταθές αν και μόνο αν

$$N = (-P_0) \leq 0$$

όπου το P_0 ορίζεται σαν ο αριθμός των πόλων (≥ 0) του GH στο δεξιό μέρος του πεδίου για συνεχή συστήματα και ο αριθμός των πόλων (≥ 0) του GH έξω από τον μοναδιαίο κύκλο για διακριτά συστήματα. Το N ορίζεται σαν ο ολικός αριθμός των CW περικυκλώσεων του σημείου $(-1,0)$ στο πεδίο GH .

Αν $N > 0$, ο αριθμός των μηδενικών Z_0 του $1 + GH$ στο δεξιό μέρος του πεδίου για συνεχή συστήματα, ή εκτός του μοναδιαίου κύκλου για διακριτά συστήματα, καθορίζονται από $Z_0 = N + P_0$.

Αν $N = 0$, το σημείο $(-1,0)$ δεν περικλείεται από το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist. Εντούτοις είναι $N = 0$ αν η περιοχή στα δεξιά του περιγράμματος στην καθορισμένη κατεύθυνση δεν περιέχει το σημείο $(-1,0)$.

Αν $N \leq 0$ και $P_0 = 0$, τότε το σύστημα είναι απόλυτα ευσταθές αν και μόνο αν $N = 0$.

Σχετική Ευστάθεια (Relative Stability)

Τα αποτελέσματα σε αυτό το τμήμα και το επόμενο δηλώνονται σε όρους του $GH(\omega)$, για είτε συνεχή είτε διακριτού χρόνου συστήματα. Η σχετική ευστάθεια ενός συστήματος ελέγχου με ανατροφοδότηση από το πολικό διάγραμμα ή το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist σε όρους συχνότητας φάσης ω_π και την μοναδιαία συχνότητα κέρδους ω_1 , που ορίζονται στο **Κεφάλαιο 10**. Η συχνότητα φάσης δίνεται από το σημείο στο οποίο το πολικό διάγραμμα κόβει τον αρνητικό πραγματικό άξονα. Η συχνότητα κέρδους δίνεται από το σημείο στο οποίο το πολικό διάγραμμα κόβει τον μοναδιαίο κύκλο στο επίπεδο P . Το όριο φάσης είναι τότε η γωνία που πρέπει να περιστραφεί το πολικό διάγραμμα για να το προκαλέσει να περάσει από το σημείο $(-1,0)$ στον μοναδιαίο κύκλο.

11.1 Ευστάθεια Nyquist για ένα σύστημα διακριτού χρόνου

Δήλωση

Θεωρήστε το τύπου 1 ψηφιακό σύστημα ελέγχου με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου αυτή που βλέπετε παρακάτω. Σχεδιάστε το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist και προσδιορίστε την σταθερότητά του για $K = 1, 2,$ και 4 με περίοδο δειγματοληψίας $T = 1$. (Το K ορίζεται σφαιρικά δίπλα στο διάγραμμα ευστάθειας παρακάτω.)

Παράμετροι Συστήματος

$$GH(z) := \frac{\frac{K}{4}}{(z-1) \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

Λύση

Πρώτα ορίστε τιμές για την διαδρομή Nyquist στο επίπεδο z , χρησιμοποιώντας τις τιμές

$$\varepsilon := 0.2$$

$$R := 3$$

Θεωρητικά, η διαδρομή Nyquist είναι το όριο της παρακάτω διαδρομής καθώς το ε πλησιάζει το μηδέν και το R πλησιάζει το άπειρο, αλλά για τους δικούς μας σκοπούς, αυτές οι τιμές είναι αρκετές. Αν το διάγραμμά μας ή οι απαντήσεις μας είναι μεγαλύτερες περισσότερο από έναν βαθμό στο μέτρο, δοκιμάστε μια μικρότερη τιμή για το ε και μία μεγαλύτερη για το R .

Για να παράγουμε το διάγραμμα Nyquist, μια σειρά από τιμές για το z , που αναπαριστά μια διαδρομή στο επίπεδο z , πρέπει να δημιουργηθεί για να αποτιμηθεί η συνάρτηση μεταφοράς.

Παραμετροποιούμε την διαδρομή σε τέσσερα μέρη. Πρώτα ορίστε τον αριθμό των σημείων για κάθε μέρος. Από κάτω, το m είναι ο δείκτης μεταβλητής:

$$N := 30$$

$$m := 1..N$$

Τώρα δημιουργήστε την διαδρομή στο επίπεδο z , η ολική διαδρομή θα τυπωθεί στην επόμενη σελίδα. Το πρώτο κομμάτι της διαδρομής είναι κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (δεξιόστροφα), εκτός του ότι αποφεύγει τον πόλο του GH στο $z = 1$.

$$z_m := e^{\frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot j}{N+1}}$$

Ο όρος $N + 1$ σιγουρεύει ότι ο κύκλος δεν κλείνει εντελώς. Σημειώστε ότι ο ρυθμός δειγματοληψίας, T , έχει τεθεί στο 1 εδώ.

Το δεύτερο μέρος της διαδρομής κινείται ελαφρά κάτω από τον πραγματικό άξονα από το $z = 1$ στο $z = R$.

Μήκος πραγματικού άξονα: $len_m := 1 + m \frac{R-1}{N}$

Μετατόπιση φανταστικού: $offset := \epsilon \cdot j$

$$z_{N+m} := len_m - offset$$

Το τρίτο μέρος είναι σχεδόν ένας ολόκληρος δεξιόστροφος κύκλος με ακτίνα R .

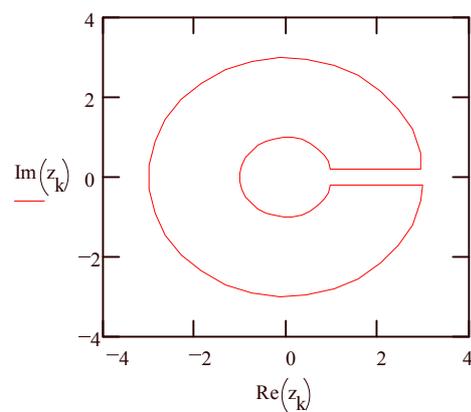
$$z_{2 \cdot N+m} := R \cdot e^{\frac{-2 \cdot \pi \cdot m \cdot j}{N+1}}$$

Το τέταρτο μέρος κινείται ελαφρά κάτω από τον πραγματικό άξονα, πίσω από εκεί που ξεκινήσαμε.

$$z_{3 \cdot N+m} := R - m \frac{R-1}{N} + offset$$

Τελικά, συνδέστε τα μέρη της διαδρομής βάζοντάς τα όλα στο ίδιο διάνυσμα, και κάντε του το γράφημα για να ελέγξετε την παραμετροποίηση:

$$z_0 := z_{4 \cdot N} \quad k := 0..4 \cdot N$$

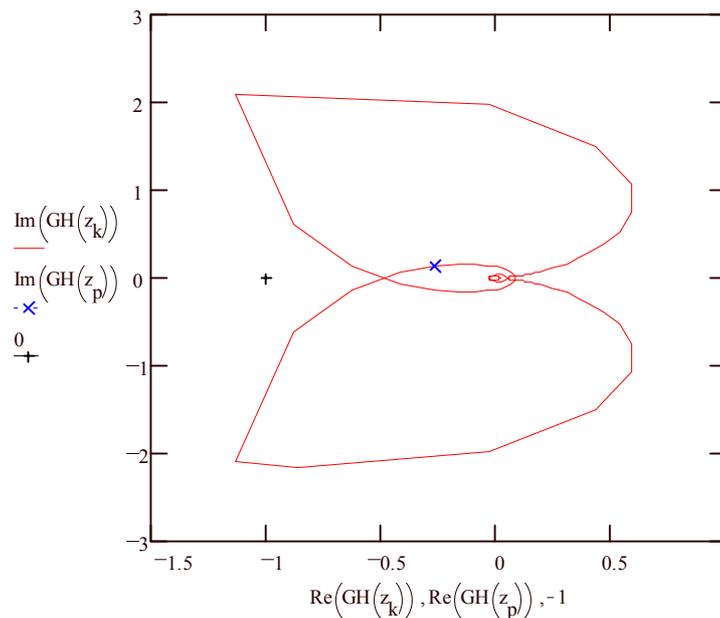


Το διάγραμμα Nyquist είναι η απεικόνιση της παραπάνω διαδρομής στο επίπεδο \mathbf{GH} . Για να προσδιορίσουμε την ευστάθεια της συνάρτησης μεταφοράς του κλειστού βρόχου, πρέπει να ξέρουμε ποιες περιοχές περικλείονται (από τα δεξιά) από το διάγραμμα Nyquist. Για να ξεχωρίσουμε το δεξιά και αριστερά, ορίστε έναν δείκτη \mathbf{p} στην παραμετροποιημένη διαδρομή και δείξτε την απεικόνιση του \mathbf{p}^{th} σημείου στην διαδρομή με έναν σταυρό. Με την αλλαγή της τιμής του \mathbf{p} , μπορούμε να προσδιορίσουμε την προσαρμογή του διαγράμματος Nyquist στο επίπεδο \mathbf{GH} .

Προσπαθήστε να αλλάξετε την τιμή του \mathbf{p} από 5 σε 6, ώστε να μπορείτε να καθορίσετε την κατεύθυνση της διαδρομής (το μπλε "x" θα κινηθεί διαμέσου της διαδρομής). Το σημείο $(-1,0)$, που δηλώνεται από το $\mathbf{+}$, δεν είναι στα δεξιά της διαδρομής, εντούτοις, δεν περικυκλώνεται από αυτή. Επειδή το $(-1,0)$ δεν περικλείεται για $\mathbf{K} = 1$, δεν υπάρχουν πόλοι εκτός του μοναδιαίου κύκλου στο επίπεδο \mathbf{z} , από το κριτήριο ευστάθειας Nyquist. Για αυτόν τον λόγο, $\mathbf{P}_0 = 0$ και $\mathbf{N} = -\mathbf{P}_0 = 0$, και το σύστημα είναι ευσταθές.

$\mathbf{p} := 5$

$\mathbf{K} = 1$



Αλλάζοντας την τιμή του \mathbf{K} από πάνω, είναι εύκολο να καθορίσετε με έλεγχο ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές σε κανένα από τα $\mathbf{K} = 2$ ή $\mathbf{K} = 4$ αφού το σημείο $(-1,0)$ είναι στα δεξιά της διαδρομής Nyquist για αυτές τις τιμές του \mathbf{K} .

Σημειώστε ότι άλλες διαδρομές είναι πιθανόν να κάνουν τον ίδιο προσδιορισμό. Για παράδειγμα, θεωρήστε την παρακάτω διαδρομή η οποία ακολουθεί τον μοναδιαίο κύκλο με μια μικρή αλλαγή στον πόλο.

11.2 Ευστάθεια Nyquist για ένα συνεχές σύστημα

Δήλωση

Θεωρήστε το συνεχές σύστημα ελέγχου με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου $\mathbf{GH}(s)$ που φαίνεται παρακάτω. Σχεδιάστε το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist και καθορίστε την ευστάθειά του. (Το \mathbf{K} ορίζεται σφαιρικά δίπλα στο διάγραμμα ευστάθειας από κάτω ώστε να μπορείτε εύκολα να δείτε το αποτέλεσμα στο γράφημα.)

Παράμετροι Συστήματος

$$\mathbf{GH}(s) := \frac{\mathbf{K}}{s}$$

Λύση

Πρώτα παραμετροποιήστε την διαδρομή Nyquist στο επίπεδο s χρησιμοποιώντας τις τιμές

$$\rho := .2 \qquad R := 5$$

Θεωρητικά, η διαδρομή Nyquist είναι το όριο της διαδρομής από κάτω καθώς το ρ πλησιάζει το μηδέν και το \mathbf{R} πλησιάζει το άπειρο, αλλά για τους σκοπούς μας αυτές οι τιμές επαρκούν.

Για να παραμετροποιήσουμε την διαδρομή σε τέσσερα μέρη, πρώτα ορίζουμε τον αριθμό των σημείων για κάθε μέρος.

$$n := 200 \qquad m := 0..n$$

Τα μέρη της ημικυκλικής διαδρομής παράγονται χρησιμοποιώντας τις φόρμουλες του **Κεφαλαίου 11**. Το πρώτο μέρος είναι ένα ημικύκλιο με ακτίνα ρ στο δεξιό μισό του πεδίου.

$$s_m := \rho \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{n} - \frac{\pi}{2} \right)}$$

Το δεύτερο μέρος κινείται κατά μήκος του άξονα $j\omega$ από το μηδέν στο άπειρο, ή για την περίπτωση μας από το ρ στο \mathbf{R} .

$$s_{n+m} := j \cdot \left[\frac{m \cdot (\mathbf{R} - \rho)}{n} + \rho \right]$$

Το τρίτο μέρος είναι ένα ημικύκλιο με ακτίνα \mathbf{R} .

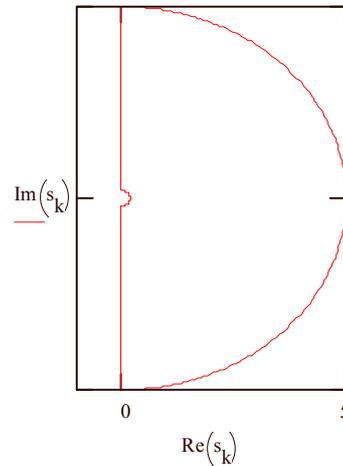
$$s_{2+n+m} := \mathbf{R} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{-\pi \cdot m}{n} + \frac{\pi}{2} \right)}$$

Το τέταρτο μέρος κινείται κατά μήκος του άξονα $j\omega$ από το άπειρο στο μηδέν, ή για την περίπτωση μας από το \mathbf{R} στο ρ .

$$s_{3+n+m} := -j \cdot \left[\mathbf{R} - \frac{m \cdot (\mathbf{R} - \rho)}{n} \right]$$

Τελικά, κλείνοντας την διαδρομή, βάλτε της δείκτη, και σχεδιάστε τη να ελέγξετε την παραμετροποίησή της:

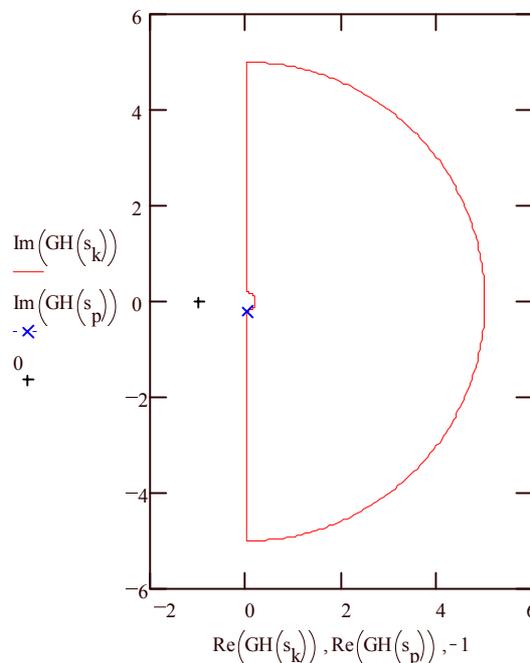
$$s_0 := s_{4-n} \quad k := 0..4-n$$



Το διάγραμμα Nyquist είναι η απεικόνιση της από πάνω διαδρομής στο επίπεδο **GH**. Για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της καμπύλης, ορίζουμε έναν δείκτη **p** στην παραμετροποιημένη διαδρομή, και δείχνουμε την απεικόνιση του **pth** σημείου στην διαδρομή με έναν σταυρό. Αλλάζοντας την τιμή του **p**, μπορούμε να καθορίσουμε τον προσανατολισμό του διαγράμματος Nyquist στο επίπεδο **GH**. Είναι επίσης πιθανό να καθορίσουμε τα τμήματα της διαδρομής Nyquist αντίστοιχα σε κάθε "σκέλος" της διαδρομής του επιπέδου **s**, με το να θέσουμε το **p** ίσο με πολλαπλάσια του **n**, τον αριθμό των σημείων σε κάθε σκέλος.

Με το να αλλάζουμε την τιμή του **p** από **5** σε **50**, μπορούμε να καθορίσουμε την κατεύθυνση της διαδρομής. Βλέπουμε ότι το σημείο (-1,0), που δηλώνεται με **+**, δεν είναι να βρίσκεται στα δεξιά της διαδρομής, εντούτοις, δεν θα είναι στην σκιασμένη περιοχή. Επειδή το σημείο (-1,0) δεν περικλείεται για **K=1** και το σύστημα είναι σταθερό. Αναφερθείτε στο δεύτερο γράφημα από κάτω (μια κοντινή ματιά στην αρχή των αξόνων) για να επαληθεύσουμε ότι το σημείο (-1,0) είναι όντως στα αριστερά της διαδρομής.

$$p := 2 \cdot n \quad K = 1$$



11.3 Σχετική Ευστάθεια

Δήλωση

Καθορίστε τα ακόλουθα για την συνάρτηση $\mathbf{GH(s)}$:

- a) Την συχνότητα crossover φάσης ω_π ,
 - b) Την συχνότητα crossover κέρδους ω_1 ,
 - c) Το όριο κέρδους, και
 - d) Το όριο φάσης.
- Δείξτε αυτές τις τιμές σε ένα διάγραμμα Nyquist.

Παράμετροι Συστήματος

Η εξίσωση ανοικτού βρόχου δίνεται παρακάτω, με τα $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$ να ορίζονται σύμφωνα

$$\mathbf{GH(s)} := \frac{1 \cdot \left(\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right)^3}{s \cdot (s + p_1) \cdot (s + p_2)}$$

Για τους σκοπούς μας, θα ορίσουμε τα $\mathbf{p_1}$ και $\mathbf{p_2}$ ως

$$p_1 \equiv 1 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \qquad p_2 \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Λύση

Θυμηθείτε από το **Κεφάλαιο 10**, ότι η συχνότητα φάσης crossover είναι η συχνότητα στην οποία η γωνία φάσης του \mathbf{GH} ισούται με -180° . Θέτοντας $\omega = \omega_\pi$, έχουμε

(α)

$$\mathbf{GH_{phase}(\omega)} = -\pi$$

Λύνοντας όπως στο **Πρόβλημα 10.1**,

$$\omega_{\text{guess}} := p_2$$

$$\omega_\pi := \text{root}\left(\arg\left(\mathbf{GH}(j \cdot \omega_{\text{guess}})\right) + \pi, \omega_{\text{guess}}\right)$$

$$\omega_\pi = 0.707 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Έλεγχος :

$$\arg\left(\mathbf{GH}(j \cdot \omega_\pi)\right) = -1 \cdot \pi$$

(β) Θυμηθείτε ότι το μέτρο της συχνότητας crossover είναι η συχνότητα στην οποία το μέτρο της συνάρτησης \mathbf{GH} ισούται με την μονάδα, ή $|\mathbf{GH}(\omega_1)|=1$.

$$\omega_{\text{guess}} := p_2$$

$$\omega_1 := \text{root}\left(\left|GH(j \cdot \omega_{\text{guess}})\right| - 1, \omega_{\text{guess}}\right)$$

$$\omega_1 = 0.813 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Έλεγχος: $\left|GH(j \cdot \omega_1)\right| = 1$

(γ) Το εύρος κέρδους μπορεί να υπολογιστεί από την ακόλουθη φόρμουλα:

$$\text{gain}_{\text{margin}} := \frac{1}{\left|GH(j \cdot \omega_{\pi})\right|}$$

Αντικαθιστώντας τους όρους, παίρνουμε την ακόλουθη τιμή για το εύρος κέρδους

$$\text{gain}_{\text{margin}} = 0.75$$

Αφού το εύρος κέρδους είναι μικρότερο από 1, το σύστημα είναι ασταθές.

(δ) Το εύρος φάσης υπολογίζεται εύκολα από την ακόλουθη φόρμουλα

$$\phi_{\text{PM}} := \pi + \arg\left(GH(j \cdot \omega_1)\right) - 2 \cdot \pi$$

$$\phi_{\text{PM}} = -7.518 \cdot \text{deg}$$

Ο έξτρα παράγοντας 2π είναι απαραίτητος γιατί η συνάρτηση **arg** δεν επιστρέφει όρισμα μικρότερο του -180° . Ένα αρνητικό εύρος φάσης σημαίνει ότι το σύστημα είναι ασταθές.

Για να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα Nyquist, ακολουθούμε την τεχνική του **Προβλήματος 11.2**.

Παραμετροποιούμε την διαδρομή σε τέσσερα μέρη:

$$\rho := 2 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \quad R := 5 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$n := 100 \quad m := 0..n$$

$$s_m := \rho \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{n} - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Κάνουμε ένα ημικύκλιο γύρω από τον πόλο στον άξονα $j\omega$.

$$s_{n+m} := j \cdot \left[\frac{m(R-\rho)}{n} + \rho \right]$$

$$s_{2-n+m} := R \cdot e^{j \cdot \left(\frac{-\pi \cdot m}{n} + \frac{\pi}{2} \right)}$$

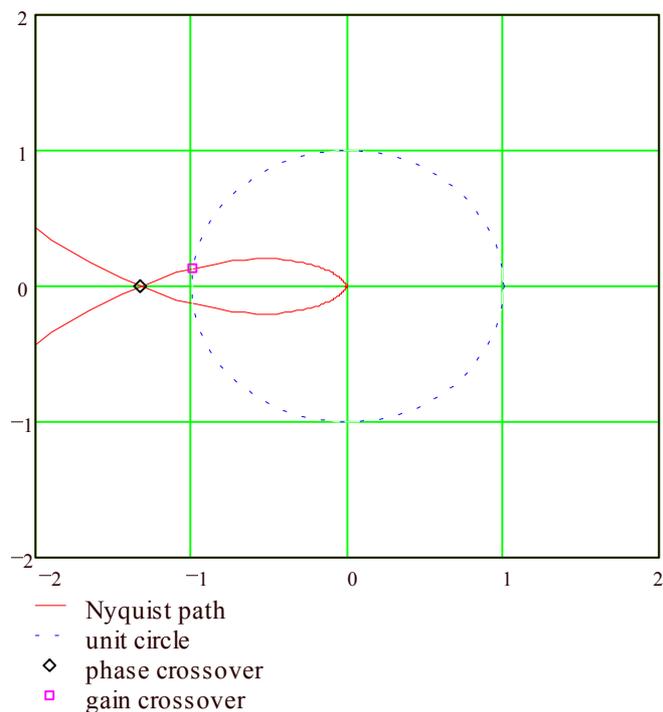
Και ένα ημικύκλιο με ακτίνα R .

$$s_{3-n+m} := -j \cdot \left[R - \frac{m(R-\rho)}{n} \right]$$

Κλείνουμε την διαδρομή και της βάζουμε δείκτη:

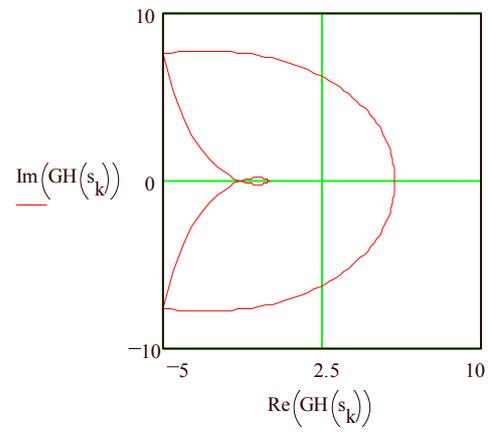
$$s_0 := s_{4-n} \quad k := 0..4-n$$

Εδώ είναι το διάγραμμα Nyquist για αυτό το σύστημα. Ο μοναδιαίος κύκλος έχει σχεδιαστεί με διακεκομμένη γραμμή ώστε να μπορούμε να καθορίσουμε την crossover συχνότητα οπτικά.



Όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 11, το GH που αποτιμάται στην crossover συχνότητα φάσης, βρίσκεται στον πραγματικό άξονα. Το εύρος κέρδους είναι το αντίστροφο της απόστασης σε αυτό το σημείο. Όμοια, το GH που αποτιμάται στο crossover κέρδος, βρίσκεται στον μοναδιαίο κύκλο, και το εύρος φάσης είναι η γωνία που απαιτείται για να περιστραφεί η διαδρομή Nyquist στον πραγματικό άξονα. Το

διάγραμμα δείχνει το σημείο $(-1,0)$ που περικλείεται από την διαδρομή Nyquist, που σημαίνει ότι το σύστημα είναι ασταθές.



11.4 Ευστάθεια Nyquist για ένα σύστημα διακριτού χρόνου II

Δήλωση

Θεωρείστε το τύπου **1** (**Κεφάλαιο 9**) ψηφιακό σύστημα ελέγχου με την συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$GH(z) := \frac{K \cdot (z+1)^2}{(z-1) \cdot \left(z+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

Σχεδιάστε το διάγραμμα ευστάθειας Nyquist και καθορίστε την ευστάθειά του για **K=1** με περίοδο δειγματοληψίας **T=1**. (Το **K** ορίζεται σφαιρικά δίπλα στο διάγραμμα ευστάθειας παρακάτω.)

Παράμετροι Συστήματος

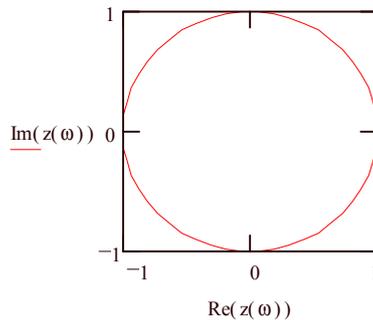
$$K = 1$$

Λύση

Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα ευστάθειας, μπορούμε απλά να αποτιμήσουμε την συνάρτηση **GH(e^{jωT})** για τιμές του **T = 1** στο εύρος **-π** έως **π** ακτίνια, αφού αυτό σχηματίζει έναν κλειστό κύκλο στο επίπεδο **z**.

$$\omega := -\pi, -0.96\pi \dots \pi$$

$$z(\omega) := e^{j \cdot \omega}$$

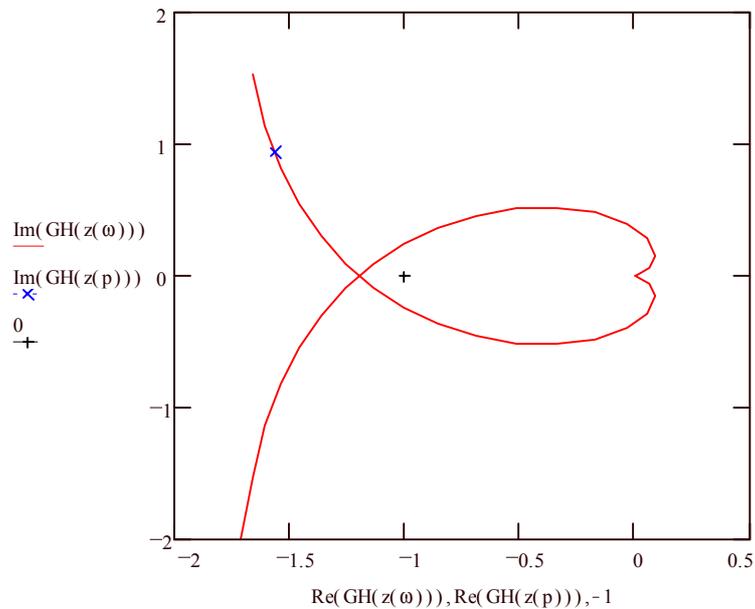


Σχεδιάζοντας το φανταστικό μέρος του **GH(ω)** ως προς το πραγματικό μέρος του, παράγεται το διάγραμμα ευστάθειας για το σύστημα. Το σημείο (-1,0) που δηλώνεται με ένα **+**, σχεδιάζεται επίσης, έτσι ώστε η ευστάθεια του συστήματος να μπορεί να

καθοριστεί. Αλλάζοντας την τιμή της παραμέτρου p από 5.1 σε 5.2, μπορείτε να καθορίσετε την κατεύθυνση της διαδρομής.

$K=1$

$p := 5.2$



Είναι εύκολο να καθορίσετε από αυτό το διάγραμμα ότι το σύστημα δεν είναι ευσταθές, αφού το σημείο $(-1,0)$ είναι στα δεξιά της διαδρομής Nyquist.

Παρατηρείστε ότι αυτή η καμπύλη δεν είναι πλήρης. Ο λόγος είναι ότι η επιλεγμένη διαδρομή στο επίπεδο z δεν αποφεύγει τον πόλο στο σημείο $z = 1$.

$n := 50$

$\epsilon := .2$

$m := 0..n$

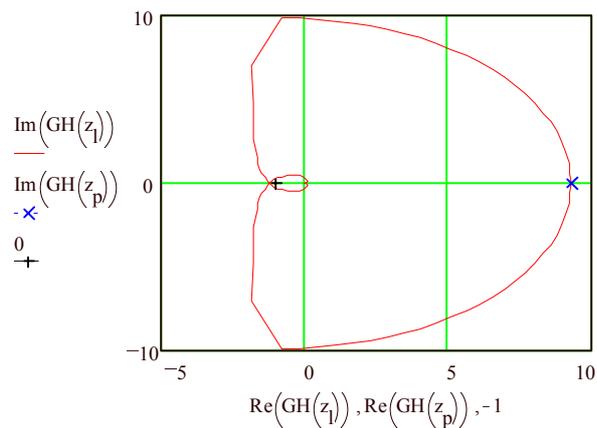
$$z_m := 1 \cdot e^{j \cdot \left(\frac{1.9 \cdot \pi \cdot m}{n} + .05 \cdot \pi \right)}$$

$$z_{m+n} := 1 + \epsilon \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{n} - \frac{\pi}{2} \right)}$$

$z_0 := z_{2 \cdot n}$

$p := 75$

$l := 0..2 \cdot n$



Σε αυτό το πιο πλήρες γράφημα, θα δείτε ότι υπάρχουν δύο περικυκλώσεις του σημείου $(-1,0)$. Θυμηθείτε, από το **Κεφάλαιο 11**, ότι αν ο αριθμός των δεξιόστροφων περικυκλώσεων, \mathbf{N} , είναι θετικός, τότε ο αριθμός των μηδενικών του $\mathbf{1 + GH}$ το οποίο βρίσκεται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο, καθορίζεται από το $\mathbf{Z_0 = N + P_0}$.

$$\mathbf{N := 2}$$

$$\mathbf{P_0 := 1}$$

$$\mathbf{Z_0 := N + P_0}$$

$$\mathbf{Z_0 = 3}$$

Σε αυτή την περίπτωση, $\mathbf{N > -P_0}$, άρα το σύστημα είναι ασταθές.

11.5 Ανάλυση Nyquist για συστήματα χρονικής καθυστέρησης

Δήλωση

Σχεδιάστε το διάγραμμα Nyquist για το $\mathbf{GH(s)}$ που φαίνεται παρακάτω.

Παράμετροι Συστήματος

$$GH(s) := \frac{e^{-s}}{s \cdot (s + 1)}$$

Λύση

Παραμετροποιούμε την διαδρομή σε τέσσερα μέρη:

$$\rho := .2 \quad R := 100$$

$$n := 500 \quad m := 0..n$$

$$s_m := \rho \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\pi \cdot m}{n} - \frac{\pi}{2} \right)}$$

Κάνουμε ημικύκλιο γύρω από τον πόλο στον άξονα $\mathbf{j\omega}$.

$$s_{n+m} := j \cdot \left[\frac{m \cdot (R - \rho)}{n} + \rho \right]$$

$$s_{2 \cdot n + m} := R \cdot e^{j \cdot \left(\frac{-\pi \cdot m}{n} + \frac{\pi}{2} \right)}$$

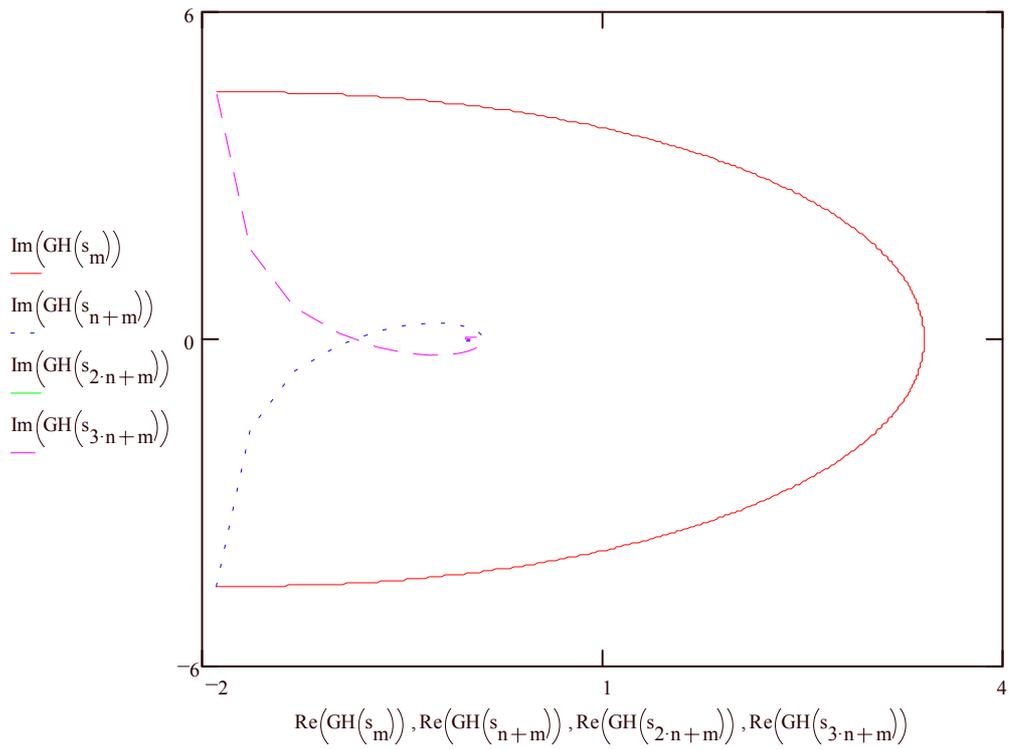
Ημικύκλιο ακτίνας \mathbf{R} .

$$s_{3 \cdot n + m} := -j \cdot \left[R - \frac{m \cdot (R - \rho)}{n} \right]$$

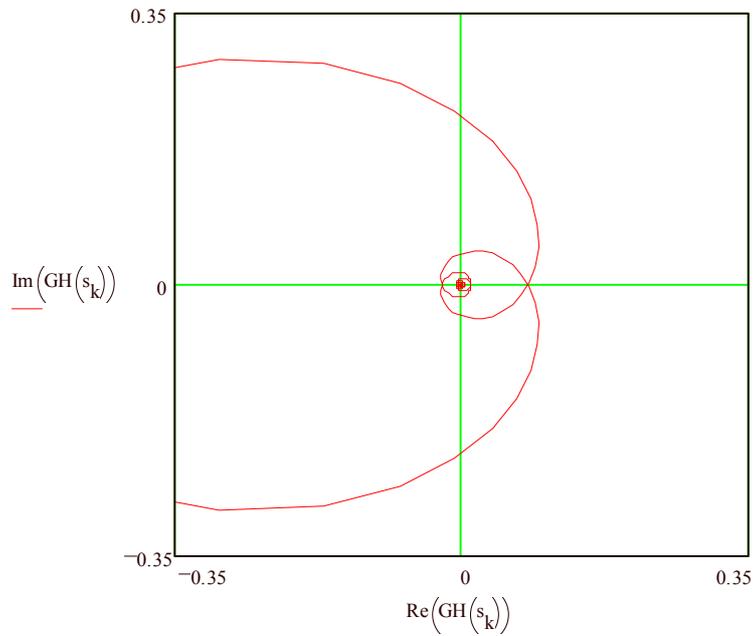
Κλείνουμε την διαδρομή και της βάζουμε δείκτη

$$s_0 := s_{4 \cdot n} \quad k := 0..4 \cdot n$$

Το διάγραμμα Nyquist για αυτό το σύστημα είναι



Και μια ευρεία θέα της κεντρικής κατασκευής,



Για αυτούς που χρησιμοποιούν το **Mathcad 5.0** ή το **Mathcad Engine**, μπορούν να χρησιμοποιήσουν την επιλογή **Zoom** στα **x-y** διαγράμματα για να εξετάσουν την δομή του διαγράμματος όσο λεπτομερέστερα θέλουν.