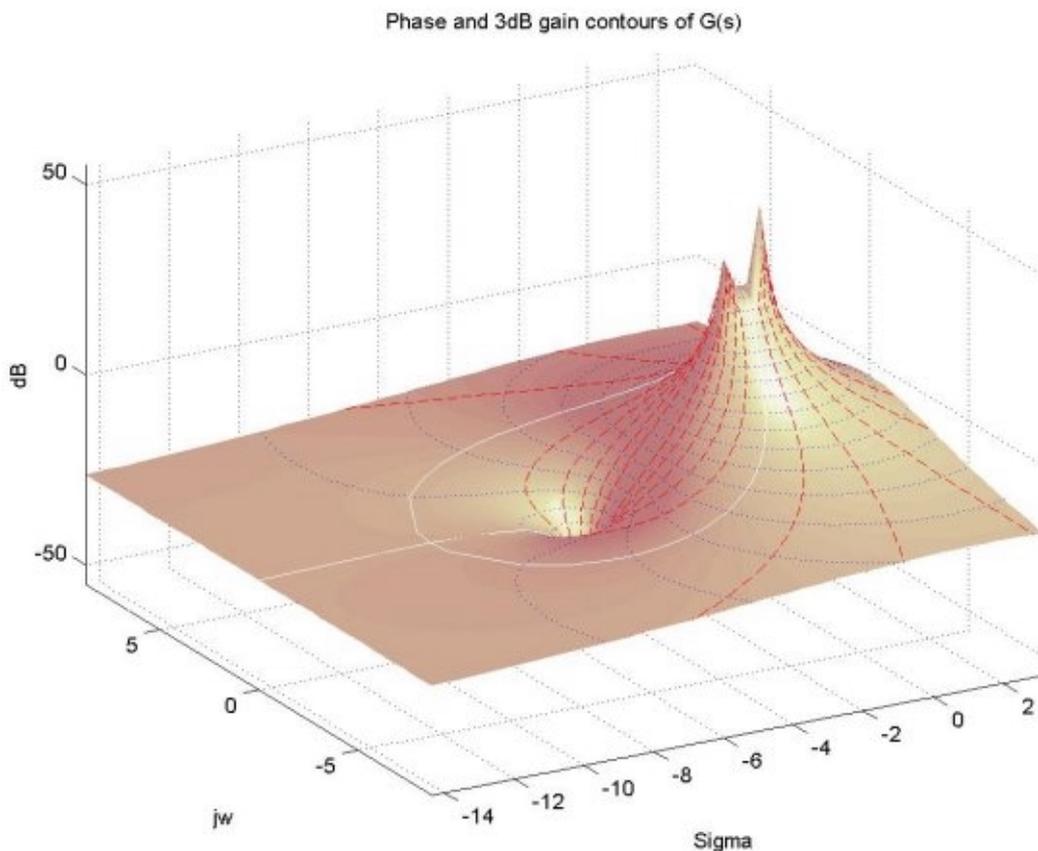


## Τρισδιάστατος Τόπος των Ριζών

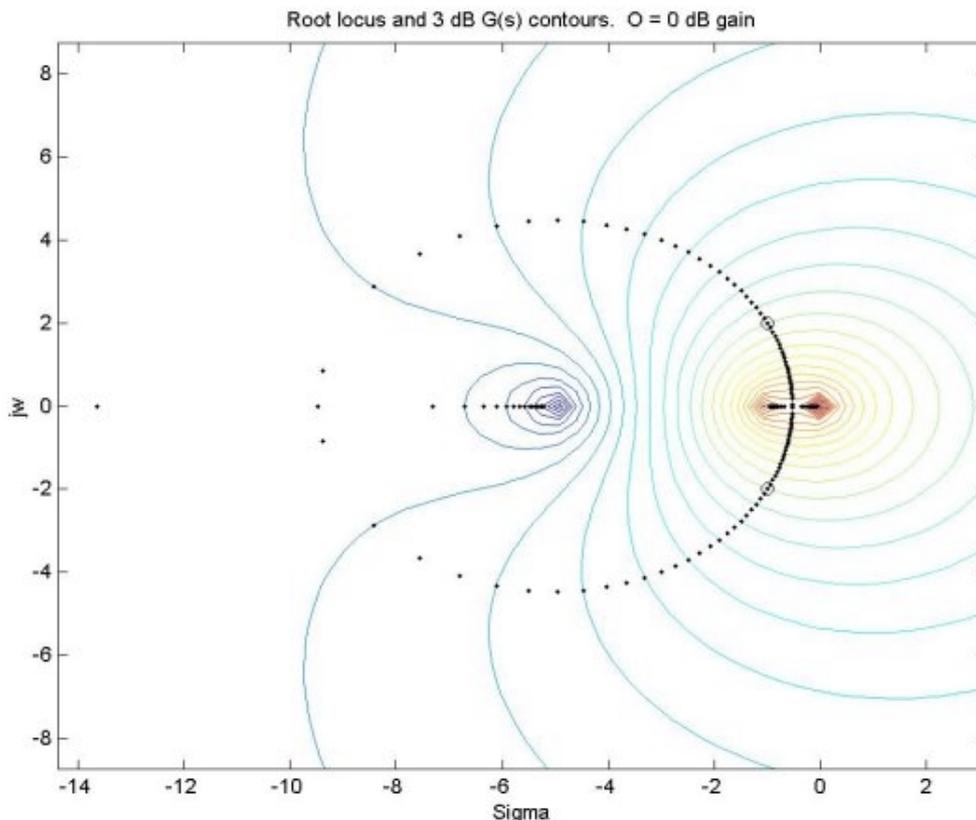
Το διάγραμμα του τόπου των ριζών έχει εξελιχθεί σε ένα τυπικό εργαλείο για την σχεδίαση συστημάτων ελέγχου. Λίγοι όμως από τους σπουδαστές γνωρίζουν ότι το διάγραμμα του τόπου των ριζών είναι ότι απέμεινε από μία γραμμή που ανήκε σε μια όμορφη τρισδιάστατη επιφάνεια, εάν αυτή την γραμμή την προβάλλουμε στο επίπεδο  $s$  μετά την αφαίρεση της πληροφορίας που αφορά στον κάθετο άξονα. Στην πραγματικότητα, η πληροφορία που περιέχεται στον κάθετο άξονα, είναι χρήσιμη για την κατανόηση του τόπου των ριζών. Ο λόγος είναι η εύκολη οπτικοποίηση των σημείων ασυνέχειας, και της υψηλής ευαισθησίας του κέρδους κοντά σε αυτά, καθώς και η επιρροή των επιπρόσθετων πόλων αλλά και μηδενικών. Ο τρισδιάστατος τόπος των ριζών έχει μια έμφυτη ομορφιά και δίνει θεμελιώδεις γνώσεις στην κατανόηση του τόπου των ριζών.

Το ακόλουθο τρισδιάστατο διάγραμμα απεικονίζει το σύστημα  $G(s)=(s+5)/(s(s+1))$ . Οι πόλοι (κορυφές) φαίνεται να έχουν άνισο ύψος, καθώς τα σημεία σχεδιασμού της τρισδιάστατης επιφάνειας δεν είναι συγχρονισμένα με τις θέσεις των πόλων.



Το παραπάνω διάγραμμα απεικονίζει τον τόπο των ριζών (άσπρη γραμμή) πάνω στην επιφάνεια των dB. Στο MATLAB, η εικόνα μπορεί να περιστραφεί σε διαφορετικές γωνίες παρατήρησης, ώστε να γίνει ευκολότερη η παρατήρησή της. Η

παραπάνω εικόνα έχει σμικρυνθεί σε ανάλυση 640x400, ώστε να επιταχυνθεί η διαδικασία "απεικόνισής" της.



Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει τον κλασικό τόπο των ριζών (μαύρα στίγματα) και τις 3-dB καμπύλες κέρδους της dB επιφάνειας (πράσινο).

## Εισαγωγή

- Ο τόπος των ριζών παραμένει το κυρίαρχο εργαλείο για την σχεδίαση συστημάτων ελέγχου.
- Έχει μία τρισδιάστατη απεικόνιση η οποία:
  - Είναι *πραγματική* αναπαράσταση των μαθηματικών
  - Είναι κουραστικό να σχεδιάζεται στις τρεις διαστάσεις
  - Βοηθάει τους μαθητές να καταλάβουν και να εμβαθύνουν *χωρίς* να είναι υποχρεωμένοι να καταλάβουν λεπτομερώς τα μαθηματικά που κρύβονται πίσω από τις τρισδιάστατες επιφάνειες.
- Υπάρχει μία συνάρτηση για το Matlab, η RLOCUS3.M, η οποία σχεδιάζει τρισδιάστατες επιφάνειες με ευκολία μέσα από το Matlab 5.

- Η συνάρτηση αυτή δίδεται δωρεάν μέσα από το site:  
<http://www.control.co.za/rlocus3.m>

## Τρισδιάστατος τύπος των ριζών- Αρχική αναφορά

### Περίληψη θεωρίας

- Η dB επιφάνεια:
  - Είναι μία επιφάνεια σχεδιασμένη στο μιγαδικό επίπεδο  $s$ .
  - Το ύψος της επιφάνειας στη μιγαδική συχνότητα,  $s$ , είναι το κέρδος σε dB στο  $s$ .
  - Όπως θα περιγράψουμε παρακάτω, η επιφάνεια είναι το άθροισμα ενός και μόνου περιγράμματος, το οποίο μετακινείται και προστίθεται (ή αφαιρείται) για κάθε πόλο ή μηδενικό.
- Ο τύπος των ριζών επεξηγεί τη διαβάθμιση μίας επιφάνειας, η οποία είναι κάθετη στις καμπύλες συνεχούς φάσης.
  - Το ύψος του κλειστού τύπου των ριζών είναι  $-20 \cdot \log_{10}(k)$
  - Το  $k$  είναι η σταθερά του κέρδους σε  $(1+kG(s)=0)$
  - Ο τύπος των ριζών είναι όμορφος στο τρισδιάστατο επίπεδο και παρέχει βαθύτερη κατανόηση του θέματος.

### Η dB Επιφάνεια

$$= 20 \cdot \log_{10}(|G(s)|)$$

- Εάν σχεδιάσουμε το κέρδος του ανοιχτού βρόγχου σε dB ως συνάρτηση του  $s$ , οι μεταβλητές της μιγαδικής συχνότητας θα είναι:
  - $db(\cdot) = 20 \cdot \log_{10}(|\cdot|)$
  - $G(s) = \prod (s-z(i)) / \prod (s-p(i))$
  - $dB(|G(s)|) = \sum dB(|s-z(i)|) - \sum dB(|s-p(i)|)$
- Θα πρέπει να σχεδιάζονται ισομεγέθεις τόποι συνήθως σε διαστήματα των 3 dB
- Ισοφασικοί τόποι του  $\angle (G(s))$  θα πρέπει επίσης να σχεδιάζονται σε διαστήματα των 10 μοιρών.

### Η dB επιφάνεια = Άθροισμα μετατοπισμένων περιγραμμάτων

- $dB(|G(s)|) = \sum dB(|s-z(i)|) - \sum dB(|s-p(i)|)$
- Η επιφάνεια είναι το άθροισμα των επιφανιών για τους ξεχωριστούς πόλους και τα μηδενικά.

- Η επιφάνεια για  $\text{dB}(|s-p(i)|)$  ισοδυναμεί με την επιφάνεια  $\text{dB}(|s|)$  όπως αυτή μεταφράζεται για την θέση  $s=p(i)$
- $\text{dB}(|s|)$  είναι κατά αυτόν τον τρόπο ένα μοναδικό περίγραμμα το οποίο μετατοπίζεται και προστίθεται για κάθε πόλο (συνέλιξη περιγραμμάτων με παλμούς  $p$  &  $z$ ).

### Τα μηδενικά είναι αναποδογυρισμένοι πόλοι

- Εφόσον ισχύει ότι  $\text{dB}(|(s-z_i)|) = -\text{dB}(1/|(s-p_i)|)$ , το περίγραμμα για τα μηδενικά είναι στην πραγματικότητα ένα αναποδογυρισμένο περίγραμμα πόλων.
- Χρησιμοποιήστε το ίδιο "νοερό" περίγραμμα  $\text{dB}(|s|)$  για πόλους και για μηδενικά (για τα μηδενικά αντιστρέψτε την φάση!)

### Καμπύλες

- Οι καμπύλες είναι ισομεγέθεις τόποι του  $G(s)$
- Οι ισοφασικοί τόποι του  $G(s)$  είναι  $\perp$  σε αυτές, έτσι μειώνουν την διαβάθμιση
- Ο τόπος των ριζών ακολουθεί τους ισοφασικούς τόπους στις  $0$  ή στις  $180$  μοίρες, έτσι κατεβάζει τις καμπύλες διαβαθμίσης των  $0$  ή των  $180$  μοιρών

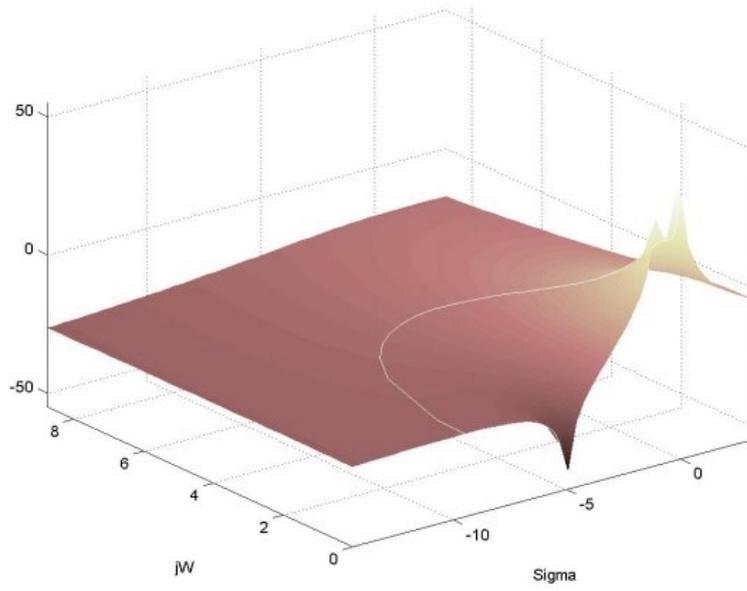
### Η εντολή RLOCUS3(num,den,[ ],[ ])

- Σχεδιάζει dB επιφάνιες συμπεριλαμβανομένων και των ισομεγεθών και ισοφασικών τόποι
- Υπερθέτει τον τόπο των ριζών.
- Δίνει προβολές κάτοψης, ισομετρικές, ημικάτοψης και πραγματικών αξόνων.
- Αυτόματη ή χειροκίνητη αυξομείωση, ενώ μπορούμε να ορίσουμε τα num, den
- Η συνάρτηση rotate3d του Matlab 5 παρέχει τη δυνατότητα να επιθεωρήσουμε την επιφάνεια από οποιαδήποτε γωνία.

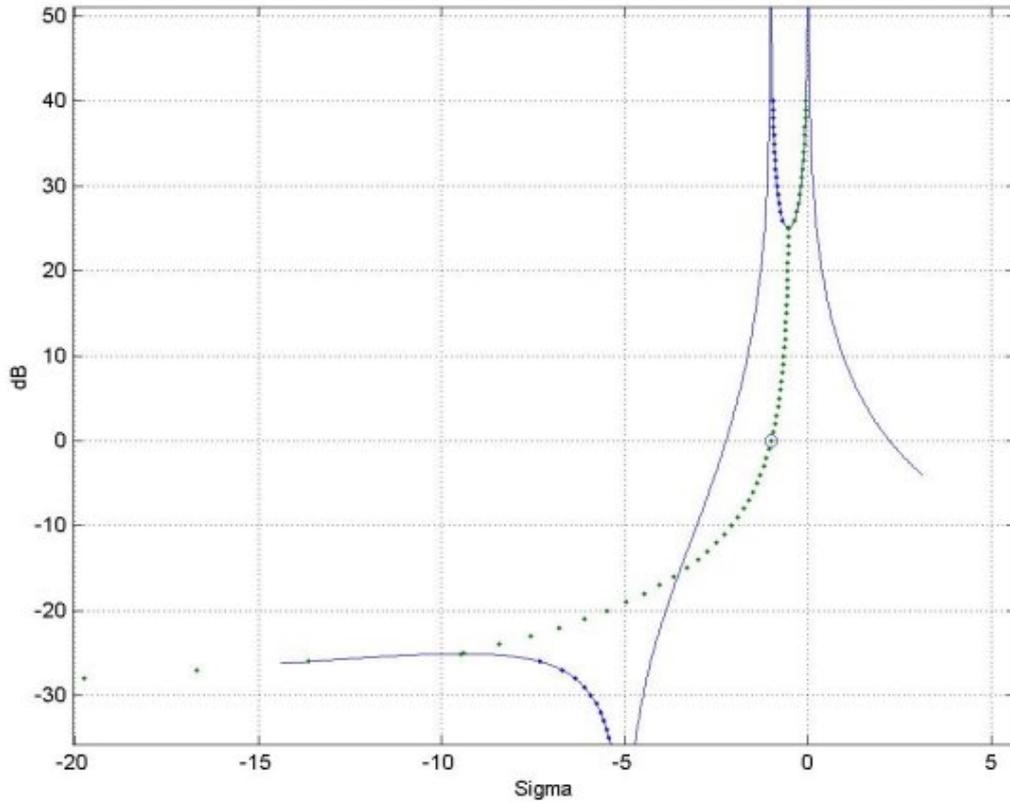
### Άλλες απεικονήσεις από την RLOCUS3

- Η Rlocus3 μας επιτρέπει επίσης να σχεδιάσουμε την ημι-κάτοψη της dB επιφάνειας. Έτσι μπορούμε να δούμε τις περιοχές που τέμνονται οι πόλοι και τα μηδενικά με τον πραγματικό άξονα
- Επίσης σχεδιάζει την προβολή του τόπου των ριζών στο κάθετο επίπεδο του πραγματικού άξονα. Πράγμα το οποίο επιτρέπει σε κάποιον να συσχετίσει την μετακίνηση των ριζών με την αλλαγή του κέρδους
- Και τα δύο διαγράμματα φαίνονται παρακάτω

Root locus on top half of dB surface



$|G(s)|$ ,  $s=\text{real}$ ,  $s$  on locus



## Συμπεράσματα

- Η RLOCUS3.M αποκαλύπτει τις χάρες και την ομορφιά του τρισδιάστατου τόπου των ριζών.
- Βοηθάει τους σπουδαστές να κατανοήσουν (ίσως και να εμνευστούν) από τον τόπο των ριζών
- Είναι ένα παράδειγμα του τρόπου με τον οποίον τα καλά γραφικά του MATLAB 5 παρέχουν στους σπουδαστές την δυνατότητα να οπτικοποιήσουν έννοιες, οι οποίες σε άλλη περίπτωση θα ήταν περιοριζόταν σε ένα σύνολο μαθηματικών κανόνων.