ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η χρονική απόκριση μπορεί να ληφθεί από αναλυτικά μέσα όπως η μέθοδος μετασχηματισμού Laplace, εναλλακτικά δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξομοίωση από Η/Υ. Η προσέγγιση που προσπαθούμε να αναπτύξουμε, γίνεται για να κατανοήσουμε τη σχέση μεταξύ της Σ.Μ. και της χρονικής απόκρισης χρησιμοποιώντας μία απλή ομάδα αναλυτικών σχέσεων. Η εξομοίωση μέσω Η/Υ μπορεί να μας δώσει την απόκριση ενός δεδομένου συστήματος μόνο, δεν μπορεί όμως να μας πεί πως να τροποποιήσουμε το σύστημα ώστε να πετύχουμε μία συγκεκριμένη απόκριση. Γι' αυτό το λόγο η εξομοίοωση μεμονωμένα δεν αποτελεί εργαλείο σχεδίασης και η γνώση της σχέσης μεταξύ των παραμέτρων μίας συνάρτησης μεταφοράς και των χαρακτηριστικών της απόκρικσής της είναι απαραίτητη.

Μέχρι προσφάτως χρησιμοποιούνταν ευρέως αναλογικοί Υπολογιστές για να επιλύσουν διαφορικές εξισώσεις και δυναμικά συστήματα εξομοίωσης. Τώρα πλέον έχουν αντικατασταθεί από τους ψηφιακούς Υπολογιστές οι οποίοι μας παρέχουν γρήγορα, ευέλικτα και ακριβή εργαλεία εξομοίωσης.

1. Δοκιμαστικά σήματα Συστήματος (System test signals).

Η απόκριση ενός δυναμικού συστήματος εξαρτάται όχι μόνο από την Σ.Μ. αλλά και από το σήμα εισόδου και τις αρχικές συνθήκες.Η ακριβής είσοδος του Συστήματος δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, παρ' όλα αυτά αν η απόδοση του συστήματος με συγκεκριμένα καλώς επιλεγμένα δοκιμαστικά σύματα είναι ευνοική τότε μπορεί να επιτευχθεί όταν υπόκεοται σε ακριβείς εισόδους λειτουργίας.

α. Μονάδες Μετρήσεως.

Η συνάρτηση μεταφοράς αντιπροσωπεύει την δυναμική ευαισθησία ενός συστήματος, οπότε ε΄χει μονάδες του συστήματος εξόδου που διανέμονται από το σύστημα εισόδου. Οι μονάδες που σχετίζονται με τα σήματα εισόδου – εξόδου αντιπροσωπεύουν μετατόπιση, τάση, πίεση, θερμοκρασία και άλλες ποσότητες. Για να απλοποιήσουμε την κατάσταση, τα σήματα συχνά *κανονικοποιούνται* και τα χρησιμοποιούμε σαν να ήταν χωρίς διάσταση. Συνήθως η μονάδα του χρόνου εκφράζεται σε "sec" ενώ η μονάδα του συντελεστή Laplace S πρέπει να καθορίζεται κάθε φορά.

β. Διαβαθμίσεις χρόνου.

Τα πρακτικά συστήματα έχουν ένα ευρύ φάσμα κλίμακας χρόνου, πράγμα που σημαίνει ότι οι χρόνοι απόκρισης εκφράζονται σε μία κλίμακα από microsec έως hour. Αυτό μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα ανακρίβειας στην εξομοίωση, οπότε η εξομοίωση μπορεί να επιβραδυνθεί με έναν παράγοντα ″α″ εάν κάθε συντελεστής του “s” μέσα στην Σ.Μ. πολλαπλασιασθεί με το ″α″. Η απόκριση μπορεί να επιταχυνθεί εάν το ″α″ είναι μικρότερο της μονάδος.

γ. Βασικά σήματα εισόδου.

Το πιό διαδεδομένο σήμα για τις δοκιμές των δυναμικών συστημάτων είναι η βηματική είσοδος. Μία βηματική είσοδος επιτυγχάνεται με ξαφνική αλλαγή από μία σταθερή τιμή σε μία άλλη. Εάν το εύρος του βήματος κανονικοποιηθεί στη μονάδα τότε έχουμε μοναδιαία βηματική είσοδο. Εάν η είσοδος μεταβάλεται σταδιακά τότε ένα χρήσιμο δοκιμαστικό σήμα είναι η αναρριχητική είσοδος (ramp input).

2. Σταθερή Κατάσταση και Απόκριση Ταλάντωσης

Η συνολική απόκριση ενός δυναμικού συστήματος θα αποτελείται από δύο ξεχωριστά τμήματα. Το πρώτο είναι το τμήμα της **ταλάντωσης** το οποίο, όπως δηλώνει και το όνομά του, πεθαίνει όσο ο χρόνος περνά και το δεύετρο είναι αυτό της **σταθερής κατάστασης** το οποίο παραμένει όταν μακριά από το μηδέν το τμήμα της ταλάντωσης έχει τελείωσει (Σχ. 1.).

Συνολική Απόκριση	=	**Απόκριση Σταθερής Κατάστασης**	+	**Απόκριση Ταλάντωσης**

Και τα δύο τμήματα απόκρισης, σταθερής κατάστασης και ταλάντωσης, εξαρτώνται σύμφωνα με τα σήματα εισόδου τα οποία εφαρμόζωνται στο σύστημα. Όπως και να έχει η δόμη ή το σχήμα της ταλάντωσης εξαρτάται μόνο από την εξίσωση του συστήματος και είναι ανεξάρτητη από το σήμα εισόδου.

3. Ταξινόμηση Συστήματος

Οι Συναρτήσεις Μεταφοράς μπορούν να ταξινομηθούν με διάφορους τρόπους.Έχουμε ήδη δει ότι ο βαθμός ενός συστήματος είναι η υψηλότερη δύναμη του s στη συνάρτηση μεταφοράς.Ο βαθμός του συστήματος είναι πολύ σημαντικός στον καθορισμό του τύπου απόκρισης που τελικώς θα πάρουμε.Η μελέτη σταθερών και στιγμιαίων αποκρίσεων διαφόρων συστημάτων θα μας οδηγήσει σε χρήσιμους διαχωρισμούς.

α. Όταν η είσοδος ενός συστήματος κρατείται σταθερή σε κάποια τιμή, η έξοδος που θα προκύψει θα έχει και αυτή κάποια σταθερή τιμή.Η σχέση μεταξύ αυτής της σταθερής κατάστασης εισόδου-εξόδουονομάζεται ***στατική ευαισθησία*** συστήματος ή ***κέρδος σταθερής κατάστασης.*** Σε αυτή την περίπτωση όπου η είσοδος-έξοδος είναι σταθερές σε συγκεκριμένες τιμές μεταβλητών, οι παράγωγοι των σημάτων εισόδου-εξόδου θα είναι μηδέν. Σε μία Σ.Μ. ο συντελεστής Laplace αντιπροσωπεύει τη διάκριση, οπότε το σατθερό κέρδος τουν συστήματος μπορεί να προκύψει αφήνοντας το συντελεστή Laplace να τείνει προς το μηδέν, ενώ οι σταθερές εισόδου-εξόδου

d/dt=0 **ισούται με** **s=0,**

οπότε

Κέρδος σταθερής κατάστασης $=G(s)|_{s->0}=G(0)$.

Η σταθερή απόκριση ενός συστήματος σε μία σταθερή είσοδο μπορεί να παραχθεί πολλαπλασιάζοντας την είσοδο με το σταθερό κέρδος, π.χ.

$$\overline{y} = G(0)\ \overline{x}$$

Πρέπει να θυμόμαστε πάντα ότι σωστή τιμή θα πάρουμε μόνο στην περίπτωση που η είσοδος είναι σταθερή ή αμετάβλητη.

β. Στιγμιαία Απόκριση Συστήματος.

Η στιγμιαία απόκριση ενός συστήματος περιγράφει πως η έξοδος αλλάζει στιγμιαία όταν η είσοδος αλλάξει ξαφνικά. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια της ανόδου μίας βηματικής εισόδου, ο ρυθμός της αλλαγής είναι πολύ μεγάλος, ενώ για ιδεατό βήμα προσεγγίζει το άπειρο.Μερικές Σ.Μ. θα δείξουν μία στιγμιαία απόκριση όταν εφαρμοστεί ένα βήμα.
Λόγω του ότι ο ρυθμός των αλλαγών των μεταβλητών κατά τη διάρκεια τόσο γρήγορων μεταβολών αγγίζει το άπειρο, η σχέση μεταξύ εισόδου-εξόδου προκύπτει από τη Σ.Μ. αν θέσουμε το συντελεστή s να τείνει στο άπειρο.

Στιγμιαίο Κέρδος $= G(s)|_{s->\infty} = G(\infty)$.

Η στιγμιαία απόκριση στην άνοδο του παλμού μίας βηματικής εισόδου προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τη μεταβολή της εισόδου με το στιγμιαίο κέρδος. Σημειώστε ότι το στιγμιαίο κέρδος ενός συστήματος αντιπροσωπεύει τη σχέση ανάμεσα στη μεταβολή της εισόδου και τη μεταβολή της εξόδου.

γ. Διαγράμματα Bode Σ.Μ.

Συχνά οι Σ.Μ. εκφράζονται σε μία τυποποιημένη μορφή ώστε τα βασικά χαρακτηριστικά να είναι ξεκάθαρα. Οι Σ.Μ. μπορούν να εκφραστούν σε μία τυποποιημένη μορφή που ονομάζεται διάγραμμα **Bode**, από τον H.W. Bode ο οποίος συνείσφερε πολλά στη θεωρία της απόκρισης συχνότητας. Μία Σ.Μ. σε μορφή Bode εκφράζεται ως ακολούθως :

$$G(s) = \frac{K_B\, G'(s)}{S^n}$$

όπου η συνάρτηση G’ (s) έχει σταθερό μοναδιαίο κέρδος G’ (0) = 1

Ο όρος S^n στον παρονομαστή εκπροσωπεί το πλήθος των ελευθέρων ολοκληρωτών (integrators) στο σύστημα. Ο αριθμός ”n” ονομάζεται **Αριθμητικός τύπος (Type number)** του συστήματος.

Η σταθερά, ″K_B″, ονομάζεται κέρδος Bode και για ένα σύστημα τύπου – 0 (δηλαδή καθόλου ελεύθεροι ολοκληρωτές) είναι η ίδια όπως και στο σταθερό κέρδος. Τα συστήματα τύπου – 1 και άνω έχουν κέρδος σταθερής κατάστασης άπειρο εφόσον

$$\mathbf{Lim}_{s \to 0}\ \mathbf{1/s = \infty}$$

Το άπειρο, σταθερής – κατάστασης, κέρδος μπορεί να γίνει αντιληπτό αν φανταστούμε έναν ελεύθερο ολοκληρωτή με μία σταθερή είσοδο. Η έξοδος θα αναρριχηθεί αόριστα και ουσιαστικά δεν θα φθάσει ποτέ σε μία σταθερή κατάσταση.

4. Η Χαρακτιριστική Εξίσωση και η Απόκριση Μετάδοσης (Transient Response)

Ας θεωρήσουμε μία γενική Σ.Μ.

Y / X (s) = G(s) = N(s) / D(s) όπου

D(s) είναι ο παρονομαστής της Σ.Μ. και N(s) ο αριθμητής .
Πολλαπλασιάζοντας (χιαστά) έχουμε :

$$\mathbf{Y(s) * D(s) = X(s) * N(s)} \qquad (3.7)$$

Εάν η είσοδος του συστήματος είναι 0 τότε η απόκριση που προκύπτει πρέπει να περιέχει ένα μόνο στοιχείο μετάδοσης (εφόσον η απόκριση σταθερής κατάστασης θα ήταν μηδέν). Η μορφή της απόκρισης μετάδοσης οποιουδήποτε συστήματος πρέπει να υπολογισθεί αν θέσουμε X(s) = 0 στη σχέση (3.7), οπότε :

$$\mathbf{Y(s) * D(s) = 0} \qquad (3.8)$$

Αποκλείοντας την περίπτωση Y(s) = 0, βρίσκουμε ότι η απόκριση μετάδοσης για ένα γενικό σύστημα καθορίζεται από την ισότητα :

$$\mathbf{D(s) = 0} \qquad (3.9)$$

Η παραπάνω σημαντική εξίσωση ονομάζεται **Χαρακτηριστική Εξίσωση** και η επίλυσή της καθορίζει την μορφή της απόκρισης μετάδοσης για οποιαδήποτε είσοδο. Σημειώσατε ότι μόνο ο παρονομαστής της Σ.Μ. εμφανίζεται στη Χ.Ε.. Επιλύοντας την Χ.Ε. βρίσκουμε τις τιμές του “S” για τις οποίες μηδενίζεται η D(s). Αυτές οι ρίζες της Χ.Ε. σχετίζονται άμεσα με την τελική απόκριση μετάδοσης. Για να δούμε την συσχέτιση των ριζών της Χ.Ε. με την απόκριση μετάδοσης ας θεωρήσουμε την εξίσωση (3.8) σε μία γενική μορφή όπου η D(s) είναι ένα πολυώνυμο n- βαθμού και η Y(s) η μετατροπή κατά Laplace της μετάδοσης **(L { $\overline{Y}$ (t) } = $\overline{Y}$ (s))** :

$$\mathbf{\overline{Y}(s)\ (\alpha_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n) = 0}\ \ \textbf{ή}$$

$$\mathbf{\alpha_0\ \overline{Y}(s) + a_1 s\ \overline{Y}(s) + \ldots + a_n s^n\ \overline{Y}(s) = 0}$$

Θεωρώντας ότι ο πολλαπλασιασμός με s στο πεδί του s, ισοδυναμεί με τη διάκρισηστο πεδίο του χρόνου, βλέπουμε ότι η απόκριση μετάδοσης είναι της ακόλουθης μορφής:

$$\alpha_0 \; \overline{Y}(t) + a_1 \, d \, \overline{y} / dt \, (t) + \ldots + a_n \, d^n \, \overline{y} / dt^n \, (t) = 0 \qquad (3.10)$$

Η μετάδοση, $\overline{y}$, πρέπει να είναι τέτοια ώστε συνδυαζόμενη με τις παραγώγους στην σχέση (3.10), οι όροι αθροιζόμενοι να ισούνται με το μηδέν (0). Η εκθετική συνάρτηση, e^{xt}, είναι υποψήφια για την επίλυση της σχέσης (3.10) εφόσον η διαφοροποίηση μίας εκθετικής συνάρτησης οδηγεί πάλι σε μία άλλη εκθετική συνάρτηση, οπότε μία πιθανή συνάρτηση για την απόκριση μετάδοσης είναι η εξής:

$$\overline{y}\,(t) = C * e^{xt} \qquad (3.11)$$

όπου ″C :″ είναι μία αυθαίρετη σταθερά.

$$d \, \overline{y} / dt \, (t) = a * C * e^{at} = a * \overline{y}(t) \qquad \text{και}$$

$$d^2 \, \overline{y} / dt^2 \, (t) = a^2 * C * e^{at} = a^2 * \overline{y}(t) \qquad \text{κλπ.}$$

Οπότε τελικά η σχέση (3.10) παίρνει την εξής μορφή :

$$a_0 * C * e^{at} + a_1 * a * C * e^{at} + \ldots\ldots + a_n * a^n * C * e^{at} = 0 \qquad \text{και}$$

όταν τελικώς διαιρεθεί με τον όρο $C * e^{at}$ προκύπτει :

$$a_0 + a_1 * a + \ldots\ldots + a_n * a^n = 0 \qquad \text{ή} \qquad D(a) = 0 \qquad (3.12)$$

Η εξίσωση (3.12) είναι η Χ.Ε. όπου το “S” αντικαταστάθηκε από το “a”. Όποτε η τιμή του “a” στην προτεινόμενη απόκριση μετάδοσης (σχέση 3.11) θα είναι μία ρίζα της Χ.Ε. Ο συντελεστής “C” μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή η οποία ουσιαστικά καθορίζεται από το σύστημα εισόδου, τις αρχικές συνθήκες και τον αριθμητή της Σ.Μ.

α. Σχέση Μεταξύ Χ.Ε. και Μοντέλων Μεταβλητών Καταστάσεων.

Οι εξισώσεις :

$$dX / dt \, (t) = A \, X(t) + B * u(t) \qquad \text{και} \qquad y(t) = C * X(t) + D * u(t)$$

δίνουν την γενική μορφή μεταβλητής κατάστασης για ένα δυναμικό σύστημα. Η Σ.Μ. αυτού του συστήματος δίνεται από την εξής σχέση:

$$Y/u \, (s) = C * [s * I - A]^{-1} * B + D.$$

Ο ανάστροφος ενός πίνακα προκύπτει αν διαιρέσουμε τον **adj** πίνακα με την ορίζουσα:

$[s*I - A]^{-1} = adj\ (s*I - A) / |s*I - A|$.

Οπότε ο παρονομαστής της Σ.Μ. καθορίζεται από την ορίζουσα του πίνακα **[s*I-A].** Η Χ.Ε. του συστήματος προκύπτει αν εξισώσουμε την ορίζουσα με μηδέν (0):

$$|s*I - A| = 0 \qquad (3.14)$$

Σ' ένα τέτοιο μοντέλο, τα χαρακτηριστικά μετάδοσης του συστήματος καθορίζονται από τον πίνακα Α. Οι ρίζες της Χ.Ε. αυτής της μορφής τιμές χαρακτηριστικής συνάρτησης του πίνακα Α.

β. Στιγμιαία Απόκριση Συστήματος.

Η στιγμιαία απόκριση ενός συστήματος έχει θεωρητικό μόνο ενδιαφέρον, αφού ο Μ/Σ Laplace ενός μοναδιαίου παλμού είναι ένα (1): $L\{\delta(t)\} = 1$.
Ο Μ/Σ Laplace της στιγμιαίας απόκρισης θα είναι :

$$Y(s) = G(s) * 1.$$

Δηλαδή η στιγμιαία απόκριση ενός συστήματος είναι απλά ο αντίστροφος Μ/Σ Laplace της Σ.Μ. του:

$$\text{Στιγμιαία Απόκριση} = L^{-1}\{G(s)\} = g(t) \qquad (3.15)$$

Οπότε η στιγμιαία απόκριση και η Σ.Μ. είναι το ίδιο αν τις δούμε από το πεδίο του χρόνουκαι το πεδίο του "-s" αντίστοιχα. Για παράδειγμα ο Μ/Σ Laplace της εκθετικής συνάρτησης είναι:

$$L\{e^{-at}\} = 1 / s+a.$$

Τροποποιώντας την Σ.Μ. ενός συστήματος πρώτου βαθμού βλέπουμε ότι:

$$\frac{1/\tau}{1/\tau + s} = L\{1/\tau * e^{-t/\tau}\}.$$ Οπότε η στιγμιαία απόκριση είναι :

$$g(t) = 1/\tau * e^{-t/\tau}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα συμφωνεί με την μετάδοση που προκύπτει από την Χ.Ε.

6. <u>Το Πεδίο – S</u>

Μία Χαρακτηριστική Εξίσωση n- βαθμού έχει n- ρίζες που η κάθε μία αντιστοιχεί σ' ένα όρο της μεταβατικής απόκρισης. Το άθροισμα αυτών των όρων είναι η συνολική μετάβαση.

Προκειμένου ν' αναπτύξουμε τη σχέση ανάμεσα στις ρίζες της Χ.Ε. και στη μετάβαση πρέπει να παραστήσουμε γραφικά τις ρίζες, οι οποίες μπορεί να είναι είτε πραγματικές ή μιγαδικές. Μία τέτοια παράσταση ονομάζεται διάγραμμα στο πεδίο – S. Οι άξονες του πεδίου -S είναι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη δηλαδή :

$$\mathbf{S = \sigma + j^*\omega} \qquad \mathbf{(3.16)}$$

7. <u>Σχέσεις μεταξύ θέσης πόλων και μετάδοσης.</u>

Μέχρι εδώ είδαμε ότι κάθε πόλος δίνει έναν όρο στην ολική απόκριση μετάδοσης. Οι πόλοι μπορεί να είναι ευκρινείς ή απλοί, εναλλακτικά μπορεί να είναι επαναλαμβανόμενοι ή πολλαπλοί.Μια πιο σύνθετη μορφή είναι επίσης και οι μιγαδικοί πόλοι.

α. Ευκρινείς Πραγματικοί Πόλοι.

Κάθε ευκρινής πόλος αντιστοιχεί σε ένα εκθετικό όρο της απόκρισης μετάδοσης, όπου ο καθένας σχετίζεται με μία αυθαίρετη σταθερά.,

Πεδίο Πόλων **Όρος μετάδοσης**

$$\mathbf{s=\sigma \quad \rightarrow \quad \overline{y}\,(t) = C\, e^{\sigma t}}$$

Για να εξασθενήσει η απόκριση συναρτήσει του χρόνου, πρέπει το **σ** να είανι αρνητικό, οπότε ο πόλος θα βρίσκεται στον αρνητικό πραγματικό άξονα.Όσο πιο αριστερά βρίσκονται οι πόλοι τόσο μεγαλύτερη εξασθένηση έχουμε, ενώ οι πόλοι που είναι στον πραγματικό θετικό άξονα αντιστοιχούν σε εκθετικούς όρους που αυξάνονται με το χρόνο.Συστήματα στα οποία ο όρος μετάδοσης αυξάνεται αόριστα με το χρόνο, ονομάζονται ***ασταθή συστήματα***.Αντιθέτως συστήματα στα οποία οι όροι μετάδοσης εξασθενολυν συναρτήσει του χρόνου ονομάζονται ***σταθερά συστήματα.***Ένας απλός πραγματικός πόλος αφορά συστήμτα πρώτου βαθμού.

β. Ευκρινείς Μιγαδικοί Πόλοι

Οι ρίζες χαρακτηριστικών εξισώσεων δευτέρου και άνω βαθμού μπορεί να έιναι μιγαδικές.Για παραγματικά συστήματα οι μιγαδικοί πόλοι δίνονται από τις ακόλουθες συζυγείς εξισώσεις

$$\mathbf{s_1 = \sigma + j\,\omega\,, \qquad s_2 = \sigma - j\,\omega}$$

Οι όροι μετάδοσης που προκύπτουν από τους παραπάνω πόλους θα είναι

$$\mathbf{\overline{y}\,(t) = C_1\, e^{(\sigma+j\omega)t} + C_2\, e^{(\sigma-j\omega)t}}$$

Προκειμένου το $\overline{y}$ να έχει πραγματική τιμή, οι σταθερές C_1 και C_2 πρέπει επίσης να είναι συζυγείς μιγαδικοί, δηλ.

$$C_1 , C_2 = \alpha \pm jb = R e^{\pm j\theta}$$

Οπότε $\overline{y}(t) = R e^{j\theta} e^{(\sigma+j\omega)t} + R e^{-j\theta} e^{(\sigma-j\omega)t}$

$$\underline{R} e^{\sigma t} \{ e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)} \}$$

$$\overline{y}(t) = R e^{\sigma t} 2 \cos(\omega t+\theta) \qquad (3.17)$$

Οπότε ο όρος μετάδοσης είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση της συχνότητας *ω* (rad per sec) η οποία πολλαπλασιάζεται με μία εκθετική συνάρτηση φθίνουσα (ή αθξανόμενη) με ρυθμό που καθορίζεται από το *σ*.οι αυθαίρετες σταθερές C_1 , C_2 έχουν αντικατασταθεί από δύο άλλες ,*R*, οι οποίες σχετίζονατι με το εύρος του ημιτόνου καθώς και γωνία *θ*, που σχετίζεται με τη φάση.Εφόσον η τιμή του *R* είναι αυθαίρετη, η εξίσωση 3.17 μπορεί να γραφεί:

Πεδίο Πόλων	**Όρος μετάδοσης**
$s = \sigma \pm j\,\omega$	$\overline{y}(t) = R e^{\sigma t} \cos(\omega t+\theta)$

Για να είναι ένα σύστημα σταθερό πρέπει οι μιγαδικοί πόλοι να βρίσκονατι στο αριστερό μισό τμήμα του πεδίου –s.

γ. Επαναλαμβανόμενοι Πόλοι

Όταν έχουμε επαναλαμβανόμενες ρίζες στη χαρακτηριστική εξίσωση τότε οι όροι μετάδοσης είναι της μορφής

$$\overline{y}(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \ldots + C_m t^m) e^{\alpha t} \qquad (3.18)$$

όπου ο όρος m είναι ο βαθμός των επαναλαμβανόμενων ριζών.

Οι τιμές των αυθαίρετων σταθερών C_1 και C_2 εξαρτώνται από τα μηδενικά, την είσοδο και τις αρχικές συνθήκες, ενώ η τιμή του α εξαρτάται μόνο απο τη θέση του επαναλαμβανόμενου πόλου.Όταν ο πόλος έχει ένα αρνητικό πραγματικό τμήμα, ο όρος θα εξασθενήσει προς το μηδέν.

δ. Γενική Ευστάθεια στο Πεδίο –s.

Οποιοσδήποτε πόλος ευκρινής ή επαναλαμβανόμενος, πραγματικός ή μιγαδικός, που έχει ένα θετικό πραγματικό μέρος οδηγεί σε ένα όρο μετάδοσης που αυξάνεται με το χρόνο.Οπότε για ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση μετά από οποιαδήποτε είσοδο ή διαταραχή, θε πρέπει όλοι οι όροι της απόκρισης μετάδοσης να τείνουν στο μηδέν.Έτσι, για να είναι σταθερό ένα σύστημα πρέπει όλοι οι πόλοι του συστήματος να βρίσκονται στο αρνητικό (αριστερό) μισό του πεδίου –s.Η θέση των μηδενικών δεν επηρεάζει την ευστάθεια του συστήματος.

Συστήματα τα οποία δεν έχουν πόλους στο δεξί μισό τμήμα του πεδίου, έχουν όμως έναν ή περισσότερους πόλους πάνω στον άξονα των φανταστικών ονομάζονται ***οριακά ευσταθή***. Ένας ελεύθερος ολοκληρωτής (με πόλο στην αρχή των συντεταγμένων) είναι ένα παράδειγμα συστήματος κρισίμου ευστάθειας με μηδενική συχνότητα.

8 Σύστημα Δευτέρου Βαθμού.

Θα ήταν πολύ χρήσιμο να εισάγουμε μία τυποποιημένη συνάρτηση μεταφοράς δευτέρου βαθμού με όλες τις σχετικές της παραμέτρους. Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη συνάρτηση

$$\frac{Y}{X}(s)=\frac{k}{k+Cs+ms^2}$$

όπου k είναι συντελεστής ψυχρότητας, C ο συντελεστής απόσβεσης του πλάτους ταλάντωσης και m η μάζα.
Διαιρώντας με το k προκύπτει η Σ.Μ. σε μορφή Bode, η οποία είναι:

$$\frac{Y}{X}(s)=\frac{1}{1+(C/k)s+(m/k)s^2} \qquad \textbf{(3.20)}$$

Οι σχετικές παράμετροι οι οποίες χρησιμοποιούνται είναι:

(α). Η *κυκλική ιδιοσυχνότητα* (φυσική συχνότητα), ω_n, η οποία σχετίζεται με την ταχύτητα ταλάντωσης της μετάδοσης.

(β). Ο *συντελεστής απόσβεσης*, ζ, ο οποίος δεν έχει διαστάσεις και αντιπροσωπεύει το ποσοστό απόσβεσης του συστήματος.

Με τη χρήση των παραπάνω παραμέτρων, η βασική μορφή μίας Σ.Μ. δευτέρου βαθμού είναι

$$\frac{Y}{X}(s)=\frac{1}{1+2\zeta s/\omega_n+(s/\omega_n)^2} \qquad \textbf{(3.21)}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 3.20 και 3.21 προκύπτουν οι εξής ισότητες συντελεστών:

$m/k = 1/\omega^2_n$ από την οποία προκύπτει ότι $\omega_n = \sqrt{k/m}$ **(3.22)**

$C/k = 2\zeta/\omega_n$ από την οποία προκύπτει ότι $\zeta = \dfrac{C\omega_n}{2k} = \dfrac{C}{2\sqrt{km}}$ **(3.23)**

Σχέση μεταξύ ζ και ω_n και θέσης πόλων

Οι πόλοι του βασικού συστήματος δευτέρου βαθμού όπως προκύπτουν από την εξίσωση 3.21 είναι οι ακόλουθοι:

$$s = \frac{-2\zeta/\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta/\omega_n)^2 - 4/\omega_n^2}}{2/\omega_n^2}$$

η οποία αν απλοποιηθεί γίνεται

$$s = -\zeta\,\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad \textbf{(3.24)}$$

Έχουμε τέσσερις περιπτώσεις να μελετήσουμε:

Συστήματα χωρίς απόσβεση, (ζ=0). Αν το σύστημα δεν έχει καθόλου απόσβεση τότε οι πόλοι βρίσκονται στον άξονα των φανταστικών και έχουν τιμή

$$s = \pm j\,\omega_n$$

Η μετάδοση είναι ένα συνεχές ημίτονο της ιδιοσυχνότητας ω_n η οποία δεν αυξομειώνεται με το χρόνο. Η μηδενική απόσβεση δηλαδή παράγει μία απλή αρμονική κίνηση. Σ'αυτή την περίπτωση η κυκλική ιδιοσυχνότητα είναι η συχνότητα στην οποία το σύστημα εκτελεί ταλάντωση.

Συστήματα με απόσβεση, (0<ζ<1). Εξετάζοντας την εξ.(3.24) βλέπουμε ότι όταν η απόσβεση έχει τιμές μικρότερες της μονάδος τότε όλοι οι πόλοι είναι μιγαδικοί. Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των πόλων δίνονται από τις ακόλουθες ισότητες αντίστοιχα,

$$\sigma = -\zeta\,\omega_n \qquad \textbf{(3.25)}$$

$$j\omega = j\,\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \qquad \textbf{(3.26)}$$

Η συχνότητα στην οποία έχουμε ταλάντωση προκύπτει από τη σχέση,

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \qquad \textbf{(3.27)}$$

και ονομάζεται *φυσική συχνότητα με απόσβεση* και είναι πάντοτε μικρότερη της ιδιοσυχνότητας ω_n.

Κρίσιμα συστήματα απόσβεσης, ζ=1. Όταν ο συντελεστής απόσβεσης ισούται με τη μονάδα, το φανταστικό μέρος μηδενίζεται οπότε έχουμε ένα διλπό πόλο στο

$$s = -\,\omega_n$$

Σ' αυτή την περίπτωση δεν έχουμνε καθόλου ταλάντωση και η απόσβεση ονομάζεται *κρίσιμη απόσβεση* .

Συστήματα πλήρους απόσβεσης, ζ>1. Εάν η τιμή της απόσβεσης ξεπεράσει την κρίσιμη τιμή, τότε οι πόλοι είναι πραγματικοί και η μετάδοση αποτελείται από δύο πραγματικές εκθετικές συναρτήσεις, ως ακολούθως

$$y(t) = C_1 e^{a1t} + C_2 e^{a2t}$$

όπου $\alpha_1 = -\zeta\,\omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$ $\qquad$ $\alpha_2 = -\zeta\,\omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

9. <u>Λεπτομερής παρουσίαση της παράστασης του πεδίου ορισμού του χρόνου.</u>

α. Κριτήρια Βηματικής Απόκρισης

Τα σχήματα 3.11 (α) και (β) απεικονίζουν τη γενική βηματική απόκριση δύο συστημάτων, ενός με ταλάντωση και ενός άλλου με μονοτονική απόκριση χωρίς καθόλου ταλάντωση.Για τα συστήματα ταλάντωσης, το ποσοστό ταλάντωσης μπορεί να καθοριστεί από την επι τοις εκατό υπερύψωση (peak overshoot) η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\%\ \text{υπερύψωση} = 100\ m_1/m_0 \qquad (3.30)$$

Ο *ρυθμός εξασθένησης* καθορίζεται από δύο επιτυχείς υπερυψώσεις, οπότε

$$\textit{ρυθμός εξασθένησης} = m_3/m_1 \qquad (3.31)$$

Ο ***χρόνος αποκατάστασης*** , t_s , εκφράζει το χρόνο που χρειάζεται για την εξασθένηση της μετάδοσης μέσα σε κάποια προκαθορισμένη ζώνη , η οποία συνήθως κυμαίνεται από ±2% και ±5%.

Για τα συστήματα ταλάντωσης η ταχύτητα της ταλάντωσης εκφράζεται σε όρους όπως *ο χρόνος έως την πρώτη κορύφωση* ή *περίοδος ταλάντωσης.*

Ο χρόνος απόκρισης καθορίζεται από το ***χρόνο ανύψωσης***, t_r **,** ο οποίος για μία απόκριση ταλάντωσης είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να φτάσει από την αρχική στην τελική τιμή.Συνήθως ο χρόνος ανύψωσης για συστήματα χωρίς ταλάντωση καθορίζεται σαν ο χρόνος ανύψωσης από το 10% στο 90% της τελικής τιμής.

β. Συστήματα Πρώτου Βαθμού.

Ένα σύστημα Α’ βαθμού έχει μία μονοτονική βηματική απόκιση, η μετάδοση της οποίας εκφράζεται από μία απλή εκθετική συνάρτηση, $\bar{y}(t) = Ce^{-t/\tau}$
Μετά από μία σταθερά χρόνου (π.χ. t=τ) η μετάδοση εξασθενεί οπότε έχουμε

$$\bar{y}/C\,(\tau) = e^{-1} = 0.37$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση βρίσκεται εντός των ορίων (1-0.37) ή στο 63% της σταθερής τιμής.Το ποσοστό 63% του χρόνου ανύψωσης αντιστοιχεί σε μία σταθερά χρόνου για ένα σύστημα Α’ βαθμού.

Ο χρόνος αποκατάστασης 5%, t_s μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τη σχέση

$$0.05 = e^{-t_s/\tau}\ ,\ \text{οπότε}\ t_s = -\tau\ \ln(0.05) \cong 3\tau$$

Δηλαδή ο χρόνος αποκατάστασης ενός συστήματος Α’ βαθμού είναι περίπου τρεις σταθερές χρόνου.

γ. Συστήματα Δευτέρου Βαθμού, Λογαριθμική μείωση και Ρυθμός Απόσβεσης.

Η βηματική απόκριση ενός συστήματος εξασθένησης β' βαθμού, φτάνει στην πρώτη κορυφή (peak) μέσα στη μισή περίοδο ταλάντωσης . Η μετάδοση ταλαντούται στην εξασθενημένη φυσική συχνότητα και είναι ίση με το φανταστικό τμήμα των πόλων. Οπότε ο χρόνος για την πρώτη κορύφωση είναι

$$t_p = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{2\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_d} \qquad (3.32)$$

Ο χρόνος ανύψωσης είναι το μισό αυτής της τιμής και μικραίνει όταν η φυσική συχνότητα εξασθένησης αυξάνεται.

Η απόκριση μετάδοσης εκφράζεται από τη σχέση (3.17), ενώ τα πραγματικά και φανατστικά μέρη των πόλων δίνονται από τις Εξ. (3.25) και (3.26) αντίστοιχα.

$$\overline{\mathbf{y}}\,\mathbf{(t) = R\, e^{-\zeta\omega_n t} \cos (\omega_d t+\theta)} \qquad \mathbf{(3.33)}$$

Το Σχέδιο 3.12 δείχει τη γενική μορφή αυτής της συνάρτησης.

Οι θετικές και αρνητικές αιχμές της ταλάντωσης πραγματοποιούνται σε χρόνους οι οποίοι διαχωρίζονται από τη μισή ημιτονοειδή περίοδο, π/ω_d. Τα πλάτη αυτών των αιχμών έχουν ορισθεί ως m_1, m_2, κλπ. Η κάθε αιχμή λαμβάνει χώρα κατά τη χρονική στιγμή που το συνημίτονο παίρνει τη μέγιστη τιμή στο ±1.

Το απόλυτο μέγεθος κάθε κορυφής , m_k , δίνεται από τη σχέση

$$m_k = Re^{-\zeta\omega_n t_k}$$

και ο ρυθμός μεταξύ δύο κορυφών διαχωρισμένος σε "n" μισές περιόδους ταλάντωσης θα είναι

$$\frac{m_{k+n}}{m_k} = \frac{\mathrm{R}e^{-\zeta\omega_n (t_k + n\pi/\omega_d)}}{\mathrm{R}e^{-\zeta\omega_n t_k}} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_k}\, e^{-\zeta\omega_n n\pi/\omega_d}}{e^{-\zeta\omega_n t_k}} = e^{-\zeta\omega_n n\pi/\omega_\delta}$$

όπου αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.27) γίνεται

$$\frac{m_{k+n}}{m_k} = e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (3.34)$$

Το αποτέλεσμα της παραπάνω σχέσης είναι απλά μία συνάρτηση ρυθμού εξασθένησης, οπότε και εξάγεται το συμπέρασμα ότι μόνο αυτό καθορίζει το σχήμα της μετάδοσης.

Για ένα σύστημα β' βαθμού, η αναλογία εξασθένησης δίνεται από την αναλογία δύο επιτυχών υπερυψώσεων που χωρίζονατι από ένα ολοκληρωμένο κύκλο, δηλ.

$$\text{Ποσοστό εξασθένησης} = \frac{m_{k+2}}{m_k} = e^{-2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (3.35)$$

Ο εκθέτης αυτής της συνάρτησης (χωρίς το αρνητικό πρόσημο), ονομάζεται ***λογαριθμική μείωση*** και εκφράζεται Λογαριθμική μείωση = $\ln \dfrac{m_\kappa}{m_{\kappa+2}} = \dfrac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ (3.36)